BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:...**Ngày học:**..

CA 1

Câu 1. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x = 1$.

b) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

c) $\sin x + \cos 2x = 1$.

d) $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

e) $2\sin\left(2x+15^\circ\right).\cos\left(2x+15^\circ\right) = 1$.

f) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

g) $\frac{\sin^2 x - 2\sin 2x - 5\cos^2 x}{2\sin x + \sqrt{2}} = 0$

h) $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \frac{5}{2}$

HD:

a) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 2.\frac{1+\cos 2x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

b) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x + \cos^2 4x = 2 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\cos 8x - \cos 2x\right) - \left(\cos 6x - \cos 4x\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 5x.\sin 3x + 2\sin 5x.\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 5x\left(\sin x - \sin 3x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0 \\ \sin 3x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = k\pi \\ 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

c) $\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

d) Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương

$\tan 2x - \tan 2x.\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x(1-\cos 2x) - (1-\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow (1-\cos 2x)(\tan 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \tan 2x = 1\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) $2\sin(2x+15°).\cos(2x+15°) = 1. \Leftrightarrow \sin(4x+30°) = 1$

$\Leftrightarrow 4x + 30° = 90° + k360°$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 15° + k90°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 15° + k90°$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

g) $\dfrac{\sin^2 x - 2\sin 2x - 5\cos^2 x}{2\sin x + \sqrt{2}} = 0 \quad (1)$

Điều kiện xác định của phương trình (1) là:

$2\sin x + \sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x \neq \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x \neq \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó,

$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0. \quad (2)$

+ Nếu $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$. Khi đó, (2) trở thành $1 = 0$ (vô lí).

+ Nếu $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, chia 2 vế của phương trình (2) cho $\cos^2 x$ ta được:

$\tan^2 x-4\tan x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan 5+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình (1) là: $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\arctan 5+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

h) $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow -2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{3}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2. Tìm m để phương trình $m\sin x+\cos 2x-m+1=0$ có đúng một nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right]$.

HD:

Ta có $m\sin x+\cos 2x-m+1=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-m\sin x+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\dfrac{m-2}{2}\end{array}\right.$

Với $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$. Dễ thấy họ nghiệm này không có nghiệm nào thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right]$

Do đó $\sin x=\dfrac{m-2}{2}$ phải cho ra đúng một nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right]$

Vì $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right]$ nên $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin x\le 0\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{m-2}{2}\le 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<m\le 2.$

Câu 3. Tìm m để phương trình $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=3-4\cos^2 x$ có đúng hai nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

HD:

$(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=3-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=(2\sin x-1)(2\sin x+1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2} \\ \cos 2x=\dfrac{1-m}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2} \\ \sin^2 x=\dfrac{m+1}{4} \end{array}\right. \quad (*)$

$\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$. Ta có hai nghiệm thuộc $(0;\pi)$ là $\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}$

Để phương trình ban đầu có đúng hai nghiệm thuộc $(0;\pi)$ thì phương trình (*) vô nghiệm hoặc (*) có nghiệm $\sin x=\dfrac{1}{2}$

Tức là ta có:

+ TH1: (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{4}>1 \\ \dfrac{m+1}{4}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$.

+ TH2: (*) có nghiệm $\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{4}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m=0.$

Thử lại, với $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$.

Dễ thấy 4 họ lượng giác này chỉ cho được 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$. Vậy nhận giá trị $m=0$.

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sin 3x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$.

b) $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}+\cos\dfrac{4x}{1+x^2}+1$.

c) $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1$.

d) $y=3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

HD:

a) $y=\dfrac{\sin 3x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$ (1)

Ta có $\sin 3x+\cos 3x+2\neq 0\quad \forall x$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Giả sử y_0 là một giá trị hàm số, khi đó tồn tại $x\in\mathbb{R}$ sao cho:

$y_0\left(\sin 3x+\cos 3x+2\right)=\sin 3x+2\cos 3x+1$.

$\Leftrightarrow\left(y_0-1\right)\sin 3x+\left(y_0-2\right)\cos 3x=1-2y_0$.

Phương trình có nghiệm khi:

$\left(y_0-1\right)^2+\left(y_0-2\right)^2\geq\left(1-2y_0\right)^2$. $\Leftrightarrow 2y_0^2+2y_0-4\leq 0$. $\Leftrightarrow -2\leq y_0\leq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2, khi $3\sin 3x+4\cos 3x=-5\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{3}+k\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

(với $\cos\alpha=\dfrac{3}{5};\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$).

Giá trị lớn nhất của hàm số là 1, khi $\cos 3x=1\Leftrightarrow x=k\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

• Đặt $t=\dfrac{2x}{1+x^2}$, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}|t|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leq 1,\forall x\neq 0\\ x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right\}\Rightarrow t\in[-1;1].$$

• Hàm số trở thành $y=\sin t+\cos 2t+1,\quad \forall t\in[-1;1]$.

$\Rightarrow y=-2\sin^2 t+\sin t+2$.

Đặt $a=\sin t$ suy ra $a\in\left[\sin(-1);\sin(1)\right]$.

Hàm số trở thành $y=-2a^2+a+2$.

Ta có bảng biến thiên:

a	$\sin(-1)$	$\frac{1}{4}$	$\sin(1)$
y	$-2\left(\sin(-1)\right)^2+\sin(-1)+2$ ↗	$\frac{17}{8}$	↘ $-2\left(\sin(1)\right)^2+\sin(1)+2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y=-2\left(\sin(-1)\right)^2+\sin(-1)+2$.

Giá trị lớn nhất của hàm số là $y=\dfrac{17}{8}$.

c) $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -2\le y\le 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2 khi:

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 khi:

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

d) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y=3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=5\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

(với $\cos\alpha=\dfrac{3}{5};\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$).

$\Rightarrow -5\le y\le 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 5 khi:

$\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=1\Leftrightarrow 3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\alpha}{3}+k\dfrac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -5 khi:

$\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=-1\Leftrightarrow 3x+\dfrac{\pi}{6}+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{\alpha}{3}+k\dfrac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Câu 5. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta đều có $\sin^6 x\cdot\cos^4 x\le\dfrac{108}{3125}$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số không âm $\sin^2 x$, $\sin^2 x$, $\sin^2 x$, $\dfrac{3}{2}\cos^2 x$ và $\dfrac{3}{2}\cos^2 x$, ta có

$$\sin^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x\ge 5\sqrt[5]{\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\frac{3}{2}\cos^2 x\cdot\frac{3}{2}\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3\ge 5\sqrt[5]{\frac{9}{4}\sin^6 x\cdot\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x\cdot\cos^4 x\le\frac{108}{3125}$$ (đpcm).

Câu 6. Nhận dạng tam giác ABC biết $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\dfrac{1}{2\cot A}+\dfrac{1}{2\cot B}$.

HD:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{1}{2\cot A}+\frac{1}{2\cot B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\sin A}{2\cos A}+\frac{\sin B}{2\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\sin(A+B)}{2\cos A\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\cos A\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B=\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B=1+\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B=1+\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)=1 \Leftrightarrow A=B.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=4$ và đường thẳng d có phương trình: $x+2y-3=0$. Viết phương trình đường tròn (C') và phương trình đường thẳng d' lần lượt là ảnh của đường tròn (C) và đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(3;-2)$.

HD:

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(3;-2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') nên:

- $T_{\vec{u}}(I)=I'(x_1;y_1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2+3=1\\y_1=3-2=1\end{cases}\Rightarrow I'(1;1)$.
- $R'=R=4$.

Do đó: phương trình đường tròn (C') là: $(x-1)^2+(y-1)^2=16$.

Gọi $M(x;y)\in d$ và $M'(x';y')=T_{\vec{u}}(M)$.

Khi đó: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$.

Mà $x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x' - 3) + 2(y' + 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 2 = 0$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $x + 2y - 2 = 0$.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-1;0)$, $C(-3;4)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến A thành G. Tìm $G' = T_{\vec{u}}(G)$.

HD:

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1-1-3}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{2+4}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(-1;2)$.
- $T_{\vec{u}}(A) = G \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AG} = (-2;0)$.
- $\begin{cases} x_{G'} = -1 - 2 = -3 \\ y_{G'} = 2 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow G'(-3;2)$.

Vậy $G'(-3;2)$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;3)$, $B(1;-4)$; đường thẳng $d: 3x - 5y + 8 = 0$; đường tròn $(C): (x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi B', (C') lần lượt là ảnh của B, (C) qua phép đối xứng tâm O. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

a) Tìm tọa độ của điểm B', phương trình của d' và (C').

b) Tìm phương trình đường tròn (C'') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

HD:

a)

• Ta có B' là ảnh của B qua phép đối xứng tâm O nên O là trung điểm của BB'.

Gọi $B'(x;y)$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = 0 \\ \dfrac{y-4}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ nên $B'(-1;4)$.

• Đường tròn (C) có tâm $I(-4;1)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi I' là ảnh của I qua phép đối xứng tâm O. Suy ra: $I'(4;-1)$.

Đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm O nên (C') có tâm $I'(4;-1)$ và bán kính $R' = R = 2$.

Phương trình đường tròn (C') là: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4$.

* Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-7)$.

Đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$.

Khi đó: d' song song hoặc trùng d nên d' có phương trình dạng: $3x - 5y + m = 0$.

Lấy $M(-1;1)$ thuộc d.

Gọi $M' = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$. $\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1 + 3 = 2 \\ y_{M'} = 1 + (-7) = -6 \end{cases} \Rightarrow M'(2;-6)$.

Do $M'(2;-6)$ thuộc d' nên: $3.2 - 5.(-6) + m = 0 \Leftrightarrow m = -36$.

Vậy phương trình d' là $3x - 5y - 36 = 0$.

b)

Gọi I'' là ảnh của I qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Khi đó $\overrightarrow{OI''} = -2\overrightarrow{OI}$

Ta có $\overrightarrow{OI} = (-4;1) \Rightarrow \overrightarrow{OI''} = (8;-2) \Rightarrow I'' = (8;-2)$.

Đường tròn (C'') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Ta có (C'') có tâm $I'' = (8;-2)$ và bán kính $R'' = |-2|.R = 4$.

Vậy phương trình (C'') là $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 16$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-3;4)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm A tỉ số $k = -2$.

HD:

Đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm A tỉ số $k = -2$ nên d' song song hoặc trùng với d.

Khi đó d' có phương trình dạng: $3x - 4y + m = 0$.

Lấy $M(4;3)$ thuộc d.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm A tỉ số $k = -2$.

Ta có $\overrightarrow{AM'} = -2.\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{AM} = (7;-1) \Rightarrow -2\overrightarrow{AM} = (-14;2)$.

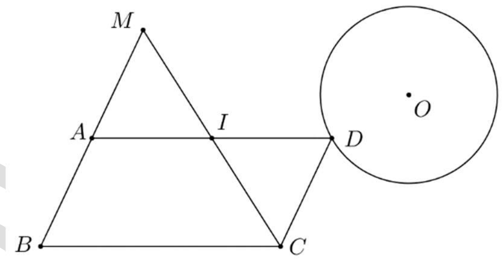
$\overrightarrow{AM'} = (x'+3;\, y'-4)$.

Khi đó $\begin{cases} x'+3=-14 \\ y'-4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-17 \\ y'=6 \end{cases}$ nên $M'(-17;6)$.

Ta có $M'(-17;6)$ thuộc d' nên: $3.(-17)-4.6+m=0 \Leftrightarrow m=75$.

Vậy phương trình d' là $3x-4y+75=0$.

Câu 20. Cho hai điểm B, C cố định và hình bình hành $ABCD$ có D di dộng trên một đường tròn (O,R). Gọi M là điểm trên AB sao cho A là trung điểm của BM. Gọi I là giao điểm của AD và MC. Chứng minh I di động trên một đường cố định.



HD:

Tứ giác $AMDC$ có $AM // CD$ và $AM = CD$

$\Rightarrow AMDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow I$ là trung điểm $AD \Rightarrow \overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Mà $\overrightarrow{CB}$ cố định suy ra I là ảnh của D qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Mặt khác D di dộng trên một đường tròn (O,R) suy I di động trên một đường tròn (O',R) là ảnh của đường tròn (O,R) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, với $O'=T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}(O)$.

Vậy I di động trên một đường tròn cố định.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là CD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SD,SB.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).

b) Xác định giao điểm E của đường thẳng d và mặt phẳng (AMN). Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (AMN).

c) Biết rằng $CD=2AB$ và F là giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN). Gọi I,J là giao điểm của các cặp CD và EM, BC và FN. Chứng minh rằng ba điểm A,I,J thẳng hàng và $SC=4SF$.

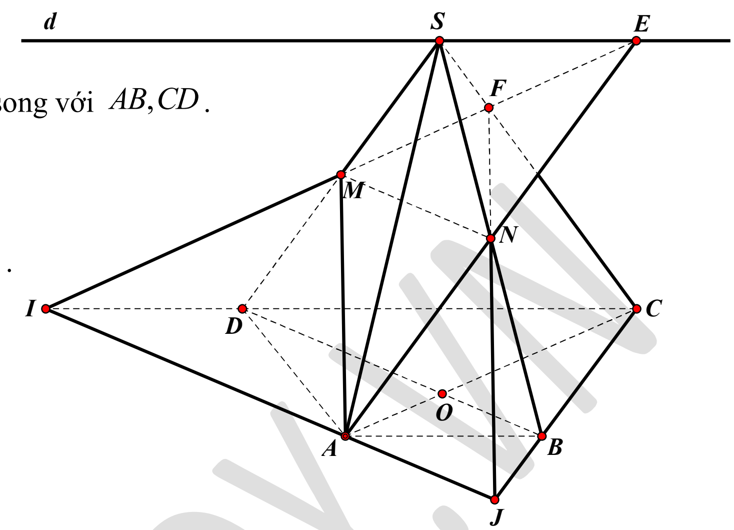
HD:

a. Ta có M,N lần lượt là trung điểm của SD,SB

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác SBD

$\Rightarrow MN // BD$ mà $MN \not\subset (ABCD), BD \not\subset (ABCD)$ nên $MN // (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$



$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d$, d qua S và song song với AB, CD.

b. Trong (SAB): Gọi $E = AN \cap d$

$\Rightarrow \begin{cases} E \in d \\ E \in AN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E = d \cap (AMN)$.

Trong (SCD): Gọi $F = ME \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} (AMN) \cap (SAB) = AN \\ (AMN) \cap (SBC) = NF \\ (AMN) \cap (SCD) = MF \\ (AMN) \cap (SAD) = AM \end{cases}$

Vậy thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp là tứ giác $ANFM$.

c. Ta có

$I = CD \cap EM \Rightarrow I \in (AMN) \cap (ABCD)$.

$J = BC \cap FN \Rightarrow J \in (AMN) \cap (ABCD)$

Suy ra $IJ = (AMN) \cap (ABCD)$

Mà $A \in (AMN) \cap (ABCD)$. Nên $A \in IJ$

Vậy A, I, J thẳng hàng.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Do $\begin{cases} AB = 2CD \\ AB \,//\, CD \end{cases}$ nên $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{3}$

Xét tam giác SCD có MF cắt CD tại I, ta có

$\dfrac{FS}{FC} \cdot \dfrac{IC}{ID} \cdot \dfrac{MD}{MS} = 1 \Rightarrow \dfrac{FS}{FC} = \dfrac{ID}{IC}$ (do $\dfrac{MD}{MS} = 1$) (1)

Ta có : $\begin{cases} (AMN) \cap (ABCD) = IJ \\ (AMN) \cap (SBD) = MN \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ NM \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, BD \,//\, IJ \Rightarrow \dfrac{ID}{IC} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{FS}{FC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow SC = 4SF$ (Điều phải chứng minh).

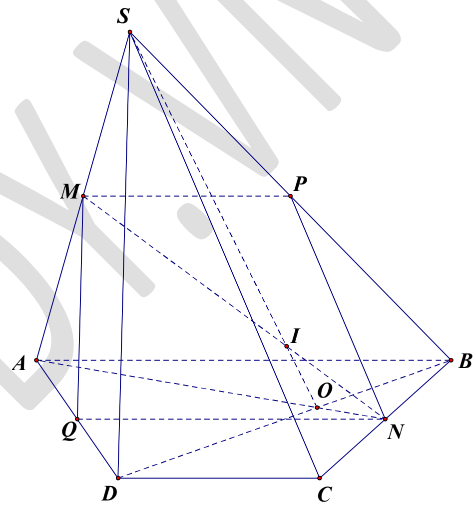
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $\left(AB//CD, AB > CD\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng $\left(SBD\right)$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua MN và song song với AB. Thiết diện là hình gì ?

c) Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

HD:



a) Gọi $O = AN \cap BD, I = SO \cap MN$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in SO \subset \left(SBD\right) \\ I \in MN \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap \left(SBD\right).$$

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB//\left(\alpha\right) \\ AB \subset \left(ABCD\right) \\ N \in \left(ABCD\right) \cap \left(\alpha\right) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d//AB$.

Suy ra d đi qua N cắt AD tại trung điểm Q.

Vậy $\left(\alpha\right) \cap \left(ABCD\right) = NQ$ $\quad(1)$

Lại có:

$$\left.\begin{array}{l} AB//\left(\alpha\right) \\ AB \subset \left(SAB\right) \\ M \in \left(SAB\right) \cap \left(\alpha\right) = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta//AB.$$

Suy ra Δ đi qua P cắt SB tại trung điểm P. Vậy $\left(\alpha\right) \cap \left(SAB\right) = MP$ $\quad(2)$

Khi đó ta có: $\left(\alpha\right) \cap \left(SAD\right) = MQ$ $\quad(3)$ và $\left(\alpha\right) \cap \left(SBC\right) = PN$ $\quad(4)$

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} MP//AB \\ NQ//AB \end{array}\right\} \Rightarrow MP//NQ \Rightarrow MPNQ$ là hình thang.

c) Ta có: $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} MQ//SD \\ SD \subset \left(SCD\right) \end{array}\right\} \Rightarrow MQ//\left(SCD\right) \\ \left.\begin{array}{l} NQ//CD \\ CD \subset \left(SCD\right) \end{array}\right\} \Rightarrow NQ//\left(SCD\right) \\ MQ \subset \left(MPNQ\right), NQ \subset \left(MPNQ\right) \\ MQ \cap NQ = Q \end{array}\right\} \Rightarrow \left(MPNQ\right)//\left(SCD\right) \quad (1)$

Mà $MN \subset (MPNQ)$ $\quad (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có MN song song với (SCD).

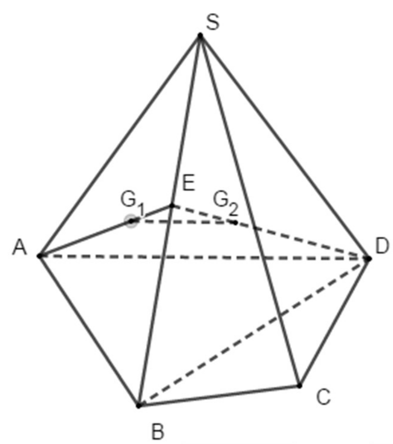
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên AB, CD, mặt phẳng (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SA. G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và tam giác SBD.

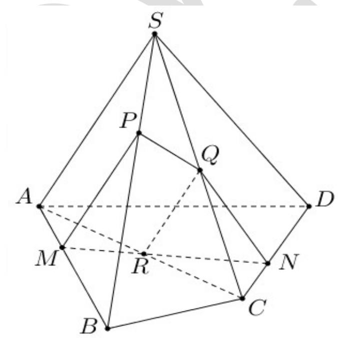
a) Chứng minh rằng: G_1G_2 // $(ABCD)$.

b) Tìm giao tuyến của (P) với (SAB) và (SAC). Xác định thiết diện của hình chóp với (P).

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

HD:





a) Gọi E là trung điểm của SB. Trong tam giác AED ta có:

$$\frac{EG_1}{EA} = \frac{EG_2}{ED} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // AD.$$

Ta có: $\begin{cases} G_1G_2 // AD \subset (ABCD) \\ G_1G_2 \not\subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 // (ABCD)$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

Ta có : $\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ (P) // SA, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = MP$ (với $MP // SA, P \in SB$).

Gọi $R = MN \cap AC$ $\left(MN, AC \subset (ABCD)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} R \in (P) \cap (SAC) \\ (P) // SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = RQ$ (với $RQ // SA, Q \in SC$).

Ta có: $\begin{cases} (P)\cap(ABCD)=MN \\ (P)\cap(SAB)=MP \\ (P)\cap(SBC)=PQ \\ (P)\cap(SCD)=QN \end{cases}$.

Vậy thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là tứ giác $MPQN$.

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Ta có $MPQN$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MP // QN\ (1) \\ MN // PQ\ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1) ta có $\begin{cases} SA // MP \\ MP // QN \end{cases} \Rightarrow SA // QN$.

Do đó: $\begin{cases} SA // QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA // (SCD)$ (vô lí).

Xét (2) ta có $\begin{cases} BC = (ABCD)\cap(SBC) \\ MN \subset (ABCD), PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // BC$.

Ngược lại, nếu $MN // BC$ thì $\begin{cases} PQ = (P)\cap(SBC) \\ MB \subset (P), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN // BC$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD và P là một điểm thuộc đoạn AB sao cho $AP = 2PB$.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

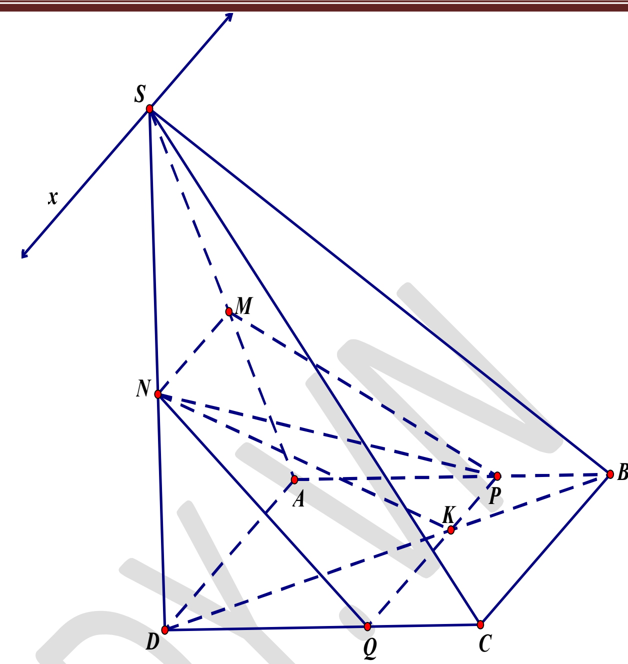
c) Tìm giao điểm Q của CD với mặt phẳng (MNP). Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình gì?

d) Gọi K là giao điểm của PQ và BD. CMR: ba đường thẳng NK, PM và SB đồng qui tại một điểm.

HD:

a) Ta có $MN // AD$, (vì MN là đường trung bình của tam giác SAD).

$\begin{cases} MN \not\subset (ABCD) \\ MM // AD \\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN // (ABCD)$.



b) Ta có $S \in (SBC) \cap (SAD)$

Mặt khác $\begin{cases} (SAD) \supset AD \\ (SBC) \supset BC \\ AD // BC \end{cases}$.

Suy ra $(SBC) \cap (SAD) = Sx // AD // BC$.

c) Ta có $(MNP) \cap (ABCD) = Py // AD // MN$.

Gọi $Q = Py \cap CD$.

Suy ra $Q = CD \cap (MNP)$.

Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình thang $NMPQ$, vì có $MN // PQ // AD$.

d) Ta có $(NMPQ) \cap (SAB) = PM$.

Mặt khác $NK \subset (NMPQ)$; $SB \subset (SAB)$.

NK, SB cùng nằm trong mặt phẳng (SBD) và NK không song song với $SB \Rightarrow NK$ và SB cắt nhau.

Vậy NK, PM và SB đồng qui tại một điểm.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD và BC không song song. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Chứng minh MN song song với $mp(ABCD)$.

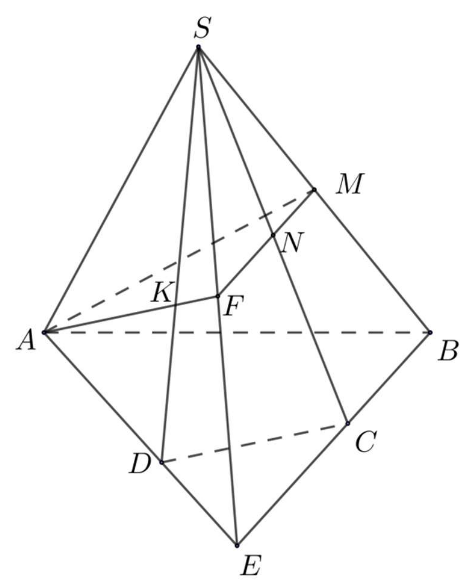
c) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với $mp(AMN)$.

HD:

a) Gọi $E = AD \cap BC$. Ta có $(SAD) \cap (SBC) = SE$.

b) Ta có $\begin{cases} MN \not\subset (ABCD) \\ MN // BC \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN // (ABCD)$.

c) Gọi $F = MN \cap SE$ và $K = AF \cap SD$. Vậy $K = SD \cap (AMN)$.



Câu 26. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=x+\sin x$. **C.** $y=x\cos x$. **D.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Câu 27. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi+k2\pi;k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

B. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

C. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;3\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 28. Chu kỳ của hàm số $y=\cot x$ là

A. $\dfrac{k\pi}{2}$. **B.** $x=\dfrac{k\pi}{4}$.

C. $0<m<\dfrac{4}{3}$. **D.** $m^2+(-1)^2<(2m-1)^2$.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3\tan x-5}{1-\sin^2 x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 30. Tập giá trị T của hàm số $y=\sin 2019x-\cos 2019x$

A. $T=[-2;2]$. **B.** $T=[-4034;4034]$. **C.** $T=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **D.** $T=\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Câu 31. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1$ là.

A. $M=2, m=-2$. **B.** $M=1, m=0$. **C.** $M=4, m=-1$. **D.** $M=2, m=-1$

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x-40^0\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^0\le x\le 180^0$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 33. Số nghiệm của phương trình $(\sin x+1)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0$ trên đoạn $[-2017;2017]$ là

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Câu 34. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{5\pi}{2}$.

Câu 35. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3\tan x = 0$ là

A. $-\frac{\pi}{3} + k\pi$. **B.** $\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **C.** $-\frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 36. Nghiệm của phương trình $cos^2 x + cosx = 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

A. 0. **B.** π. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 37. Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ là

A. $-\frac{\pi}{6} + k2\pi$; $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3} + k2\pi$; $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

C. $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\pi + k2\pi$. **D.** $\frac{\pi}{4} + k2\pi$; $\frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 38. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ là:

A. $-\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{5\pi}{12} + k2\pi$. **B.** $-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

C. $\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $-\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 39. Nghiệm của phương trình $\sin x \cos x \cos 2x = 0$ là:

A. $k\pi$. **B.** $\frac{k\pi}{2}$. **C.** $\frac{k\pi}{4}$. **D.** $\frac{k\pi}{8}$.

Câu 40. Nghiệm của phương trình $\tan x + \cot x = 2$ là:

A. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$. **B.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$. **C.** $\frac{5\pi}{4} + k2\pi$. **D.** $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 41. Phương trình $\sin 2x + \cos^2 x = \frac{m}{2}$ có nghiệm với mọi m thỏa mãn:

A. $1 - \sqrt{5} \le m \le 1 + \sqrt{5}$. **B.** $1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3}$.

C. $1 - \sqrt{2} \le m \le 1 + \sqrt{2}$. **D.** $0 \le m \le 2$.

Câu 42. Phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm với mọi m thỏa mãn:

A. $0 < m < \frac{4}{3}$. **B.** $0 \le m \le \frac{4}{3}$. **C.** $m \le 0$ hoặc $m \ge \frac{4}{3}$. **D.** $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$

Câu 43. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x-\sin 2x+\cos 2x=0$ có nghiệm là:

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020

Câu 44. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin x+\sqrt{2}\sin 2x=0$ là:

A. $\frac{3\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 45. Hàm số $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. Số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ $A=\{0;1;2;3;4;5\}$ và chia hết cho 5.

A. 90. **B.** 108. **C.** 115. **D.** 120.

Câu 47. Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 cầu trắng. Từ mỗi bình lấy một quả cầu, có bao nhiêu cách để cuối cùng lấy được ba quả cầu giống nhau.

A. 180. **B.** 150. **C.** 120. **D.** Đáp án khác.

Câu 48. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một tổ 6 người trong đó có nhiều nhất 2 nữ?

A. 1524. **B.** 472. **C.** 1414. **D.** 3003.

Câu 49. Có bao nhiêu cách xếp 6 người thành một vòng tròn

A. $2.5!$. **B.** $5!$. **C.** $2.4!$. **D.** $6!$.

Câu 50. Có một hộp có 4 bi xanh, 3 bi đỏ và 5 bi đen (các viên bi được đánh số khác nhau). Số cách lấy 3 bi không đủ 3 màu là:

A. 120. **B.** 160. **C.** Đáp án khác. **D.** 220.

Câu 51. Có 6 lọ hoa khác nhau và 4 bông hoa khác nhau. Có bao nhiêu cách cắm hoa vào lọ (mỗi lọ chỉ có 1 bông hoa)?

A. 360. **B.** 150. **C.** 400. **D.** 240.

Câu 52. Cho đa giác lồi có 10 cạnh, nối 2 đỉnh bất kì của đa giác. Tính số đường chéo của đa giác đó?

A. 90. **B.** 45. **C.** 35. **D.** 20.

Câu 53. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 nam và 6 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nữ luôn đứng cạnh nhau.

A. 36000. **B.** 72000. **C.** 35000. **D.** 86400.

Câu 54. Từ các chữ số $1,2,3,4,5$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số (các chữ số đôi một phân biệt) sao cho phải có chữ số 2?

A. 128. **B.** 120. **C.** Đáp số khác. **D.** 150.

Câu 55. Trên kệ sách có 20 cuốn sách, trong đó có hai cuốn cùng thể loại, 18 cuốn sách khác thể loại. Số cách sắp xếp sao cho các cuốn sach cùng thể loại kề nhau là:

A. $18!.2!$. **B.** $19!.2!$. **C.** $18!.3$. **D.** $18!+2!$.

Câu 56. Có một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam. Cần chọn 6 em trong đó sao cho số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Số cách chọn là

A. 350. **B.** 462. **C.** 455. **D.** 35.

Câu 57. Tất cả các giá trị n thỏa mãn: $A_n^2-3C_n^2=15-5n$ là

A. $n=5$, $n=6$, $n=12$. **B.** $n=6$, $n=3$. **C.** $n=5$, $n=6$. **D.** $n=5$, $n=3$.

Câu 58. Biết $3^n-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+...+(-1)^nC_n^n=16384$. Hệ số của x^9y^{24} trong khai triển của $\left(2xy+y^3\right)^n$ là

A. 2002. **B.** 64064. **C.** 1025024. **D.** Đáp án khác.

Câu 59. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Gọi A là biến cố: " tích số chấm xuất hiện của lần gieo thứ nhất và lần gieo thứ hai là một số chẵn". Tính xác suất của biến cố A.

A. $0,25$. **B.** $0,5$. **C.** $0,75$. **D.** $0,85$.

Câu 60. Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A. $\frac{70}{143}$. **B.** $\frac{73}{143}$. **C.** $\frac{56}{143}$. **D.** $\frac{87}{143}$.

Câu 61. Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{16}{33}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 62. Cho tập hợp $A=\{0,1,2,3,4,5\}$. Gọi S là tập hợp các số gồm có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{23}{25}$. **C.** $\frac{2}{25}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 63. Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là tốt nếu trong đề thi có cả ba loại câu hỏi dễ, trung bình và khó. Đồng thời số câu hỏi dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tính xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt"

A. $\frac{941}{1566}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{625}{1566}$.

Câu 64. Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là $0,6$. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng mục tiêu và một viên trượt mục tiêu là

A. $0,4$. **B.** $0,6$. **C.** $0,48$. **D.** $0,24$.

Câu 65. Ba người cùng bắn vào một bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là $0,8$; $0,6$; $0,5$. Xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích là

A. $0,24$. **B.** $0,96$. **C.** $0,46$. **D.** $0,92$.

Câu 66. Cho A,B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A)=\frac{1}{5}, P(A\cup B)=\frac{1}{3}$. Khi đó $P(B)$ là:

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{8}{15}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

Câu 67. Cho A,B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A)=0,5, P(A\cap B)=0,2$. Khi đó $P(A\cup B)$ là

A. $0,3$. **B.** $0,5$. **C.** $0,6$. **D.** $0,7$.

Câu 68. Trong một kì thi có 60% thí sinh đỗ. Hai bạn A, B cùng dự kì thi đó. Xác suất để chỉ có một bạn thi đỗ là:

A. $0,24$. **B.** $0,36$. **C.** $0,16$. **D.** $0,48$.

Câu 69. Hai cầu thủ sút phạt đền. Mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là $0,8$ và $0,7$. Xác suất để có ít nhất một cầu thủ làm bàn là:

A. $0,42$. **B.** $0,94$. **C.** $0,234$. **D.** $0,9$.

Câu 70. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x+y+1=0$. Ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(2;1)$ là đường thẳng có phương trình

A. $3x-y-6=0$. **B.** $3x+y+6=0$. **C.** $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

Câu 71. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x+2y-1=0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng $d': x+2y-11=0$ thì vectơ $\vec{u}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\vec{u}=(-2;4)$. **B.** $\vec{u}=(2;4)$. **C.** $\vec{u}=(4;2)$. **D.** $\vec{u}=(2;-4)$.

Câu 72. Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục Đ$_a$, những điểm nào sau đây biến thành chính nó

A. Những điểm thuộc đường thẳng song song với đường thẳng a.

B. Những điểm thuộc đường thẳng a.

C. Những điểm thuộc đường thẳng vuông góc với đường thẳng a.

D. Những điểm thuộc đường thẳng hợp với đường thẳng a góc 60^0.

Câu 73. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(1;3)$ và $M'(-1;1)$. Phép đối xứng trục Đ$_a$ biến điểm M thành M' có trục a có phương trình là

A. $x-y+2=0$. **B.** $x-y-2=0$. **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Câu 74. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và điểm $I(2;2)$. Phương trình đường tròn ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm I là

A. $x^2+y^2-2x-2y-8=0$. **B.** $x^2+y^2-6x-6y+14=0$.

C. $x^2+y^2-4x-4y+4=0$. **D.** $x^2+y^2-6x-6y+10=0$.

Câu 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0$, $d_2: x+2y-3=0$ và $I(2;2)$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho M là ảnh của N qua phép đối xứng tâm I. Chọn khẳng định đúng.

A. $M(-5;7)$ và $N(9;-3)$. **B.** $M(-5;7)$ và $N(-3;3)$.

C. $M(7;-5)$ và $N(9;-3)$. **D.** $M(7;-5)$ và $N(3;0)$.

Câu 76. Hình nào sau đây có vô số tâm đối xứng?

A. Hình lục giác đều.

B. Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau.

C. Hình gồm hai đường thẳng song song.

D. Hình gồm hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

Câu 77. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

C. Nếu M' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(O;\alpha)}$ thì $(OM';OM)=\alpha$.

D. Phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Câu 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét điểm $M(-1;2)$, $\vec{u}=(1;2)$. Gọi $Đ$ là phép đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Xét $M_1 = Đ(M)$, $M_2 = T(M_1)$. Điểm M_2 có tọa độ là

A. $(3;1)$. **B.** $(3;-1)$. **C.** $(-3;-1)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 79. Điểm $M(-6;4)$ là ảnh của điểm nào sau đây qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=-2$?

A. $A(12;-8)$. **B.** $B(-2;3)$. **C.** $C(3;-2)$. **D.** $D(-8;12)$.

Câu 80. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Phép vị tự tâm A biến tam giác ABC thành tam giác AMN có tỉ số bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$, d là đường thẳng có phương trình $x+2y=0$. Phương trình ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự V tâm I tỉ số $k=3$ là

A. $x+2y+8=0$. **B.** $x+2y+6=0$. **C.** $x+2y+4=0$. **D.** $x+2y+2=0$.

Câu 82. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. V là một phép dời hình.

B. Mọi đường tròn tâm O đều biến thành chính nó qua V.

C. Qua V, mọi đường tròn qua O đều biến thành đường tròn bằng nó.

D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay $45°$ và phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$. Phương trình của (C') là:

A. $(C'): x^2+y^2-4x-4y-4=0$. **B.** $(C'): x^2+y^2-4x-4y=0$.

C. $(C'): x^2+y^2-4y-4=0$. **D.** $(C'): x^2+y^2+4y-4=0$.

Câu 84. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kỳ, gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, M'' là ảnh của M' qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Phép tịnh tiến biến M thành M'' là phép tịnh tiến theo vectơ.

A. $\vec{u}$. **B.** $\vec{v}$. **C.** $\vec{u}+\vec{v}$. **D.** $\vec{u}-\vec{v}$.

Câu 85. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **B.** Phép vị tự là một phép đồng dạng.

C. Phép đồng dạng là một phép dời hình. **D.** Phép vị tự không phải phép dời hình.

Câu 86. Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải phép dời hình:

A. Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng. **B.** Phép đồng nhất.

C. Phép vị tự tỉ số -1. **D.** Phép đối xứng trục.

Câu 87. Cho hình vuông $ABCD$ và phép quay Q có tâm quay là O, góc quay α. Với giá trị nào của α thì phép quay Q biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.

A. $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **C.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AB//CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Câu 89. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. Đường thẳng MN.

B. Đường thẳng AM.

C. Đường thẳng BG (G là trọng tâm ΔACD).

D. Đường thẳng AH (H là trực tâm ΔACD).

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $IJCD$ là hình thang.

B. $(SAB)\cap(IBC)=IB$.

C. $(SBD)\cap(JCD)=JD$.

D. $(IAC)\cap(JBD)=AO$, O là tâm $ABCD$.

Câu 91. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau.

B. Cắt nhau.

C. Song song nhau.

D. Chéo nhau.

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

A. qua I và song song với AB.

B. qua J và song song với BD.

C. qua G và song song với CD.

D. qua G và song song với BC.

Câu 93. Cho tứ diện $ABCD$ có M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (T) là hình bình hành.

B. (T) là tam giác.

C. (T) là tam giác hoặc hình thang.

D. (T) là hình thoi.

Câu 94. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $a\subset mp(P)$ và $mp(P)$ song song với đường thẳng $\Delta \Rightarrow a//\Delta$.

B. $\Delta//mp(P)\Rightarrow$ Tồn tại đường thẳng $\Delta'\subset mp(P):\Delta'//\Delta$. Nếu $\Delta//mp(P)$ thì tồn tại đường thẳng $\Delta'\subset mp(P)$ để $\Delta'//\Delta$.

C. Nếu đường thẳng Δ song song với $mp(P)$ và (P) cắt đường thẳng a thì Δ cắt đường thẳng a.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó song song nhau.

Câu 95. Cho đường thẳng a nằm trong $mp(\alpha)$ và đường thẳng $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $b//(\alpha)$ thì $b//a$.

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

C. Nếu $b//a$ thì $b//(\alpha)$.

D. Nếu b cắt (α) và $mp(\beta)$ chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

Câu 96. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm nằm trong tam giác ABC, $mp(\alpha)$ qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi $mp(\alpha)$ là:

A. Tam giác. **B.** Hình chữ nhật **C.** Hình vuông **D.** Hình bình hành

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN//(ABCD)$ **B.** $MN//(SAB)$ **C.** $MN//(SCD)$ **D.** $MN//(SBC)$

CA 2

Câu 7: Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5}.2^n\right);\left(\frac{5}{2^n}\right);\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ là các cấp số nhân.

HD:

Ta có: $u_n=\frac{3}{5}.2^n \Rightarrow u_{n+1}=\frac{3}{5}.2^{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n}=2$$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với công bội $q=2$

Ta có: $u_n=\frac{5}{2^n} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{5}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với công bội $q=\frac{1}{2}$

Ta có: $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{2}$

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a) Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q.

b) Biết q = 2323, $u_4 = 821821$. Tìm u_1.

c) Biết $u_1 = 3$, q = -2. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

HD:

a) Ta có: $u_6 = u_1.q^5$

Hay $486 = 2.q^5 \Rightarrow q^5 = 243 \Rightarrow q = 3$

b) $u_4 = u_1.q^3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{\frac{8}{21}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{7}$

c) $u_n = u_1.q^{n-1}$

Hay $192 = 3.(-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 64$

$\Rightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$

Vậy $u_7 = 192$