

Toán lớp 9: Nền tảng chuyên

ÔN THI HỌC KÌ I

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:..... Ngày học:.....

**Câu 1.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$ ; đường kính  $AB$ . Kẻ các tiếp tuyến  $Ax, By$  với nửa đường tròn,  $M$  là một điểm thuộc nửa đường tròn  $(O; R)$  ( $M \neq A, B$ ). Tiếp tuyến tại  $M$  cắt  $Ax, By$  lần lượt tại  $C, D$ .

- 1) Chứng minh: 4 điểm  $O, M, D, B$  cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Chứng minh:  $\widehat{COD} = 90^\circ$ ;  $CD = AC + DB$ ;  $AC \cdot DB = R^2$
- 3) Gọi  $AM$  cắt  $OC$  tại  $N$ ;  $BM$  cắt  $OD$  tại  $P$ . Xác định dạng tứ giác  $MNOP$ .
- 4) Chứng minh:  $AB$  là tiếp tuyến đường tròn đường kính  $CD$ .
- 5) Tìm vị trí của  $M$  trên nửa đường tròn  $(O; R)$  để  $(AC + DB)$  min.
- 6) Khi  $M$  chuyển động trên nửa đường tròn  $(O; R)$  ( $M \neq A; B$ ) thì trung điểm  $I$  của  $NP$  chuyển động trên đường nào.
- 7) Kẻ  $MH \perp AB$  tại  $H$ ,  $CB$  cắt  $MH$  tại  $K$ . Chứng minh:  $K$  trung điểm của  $MH$ .

**Câu 2.** Cho  $(O; R)$ ; đường kính  $AB$ , dây  $CD \perp OA$  tại điểm  $H$  nằm giữa  $O$  và  $A$ ;  $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $H$ .

- 1) Xác định dạng tứ giác  $ACED$ .
- 2)  $DE$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Chứng minh điểm  $I$  thuộc đường tròn đường kính  $EB$  tâm  $O'$ . Xác định vị trí tương đối của  $(O)$  &  $(O')$ .
- 3) Chứng minh:  $HI$  là tiếp tuyến của  $(O')$ .
- 4) Tính  $HI$  khi  $AE = \frac{2R}{3}$ .

**Câu 3.** Cho  $(O; R)$  và  $A$  ở ngoài  $(O; R)$  sao cho  $OA=2R$ . Vẽ tiếp tuyến  $AB$  với  $(O; R)$ , tiếp điểm  $B$

- 1) Tính các góc của  $\triangle AOB$  và độ dài  $AB$  theo  $R$ .
- 2) Đường cao  $BH$  của  $\triangle AOB$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $C$ . Chứng minh:  $AC$  là tiếp tuyến  $(O)$ .
- 3) Vẽ cát tuyến  $ADE$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $DE$ . Chứng tỏ năm điểm  $A, B, O, K, C$  cùng thuộc một đường tròn.
- 4) Đoạn  $OA$  cắt  $(O)$  tại  $I$ . Chứng minh:  $I$  cách đều 3 cạnh của  $\triangle ABC$ ,  $I$  cách đều 3 đỉnh của  $\triangle ABC$ .
- 5) Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

**Câu 4.** Cho  $(O)$  đường kính  $AB$  và tiếp tuyến  $Ax$ . Từ  $M$  thuộc tia  $Ax$ , kẻ tiếp tuyến thứ hai  $MC$  với  $(O)$  ( $C$  là tiếp điểm).

- 1) Chứng minh 4 điểm  $A, M, C, O$  thuộc một đường tròn.
- 2) Đường vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt  $BC$  ở  $N$ .
- a) Chứng minh :  $MO$  là đường trung trực của  $AC$ .

b) Chứng minh :  $MO \parallel NB$ .

c) Tứ giác  $OMNB$  là hình gì vì sao ?

d) Trục tâm  $H$  của tam giác  $AMC$  di động trên đường cố định nào khi  $M$  di động trên  $Ax$ .

**Câu 5.** Cho  $(O; 4\text{cm})$ , đường kính  $AB$ . Lấy điểm  $H$  thuộc đoạn  $AO$  sao cho  $OH = 1\text{cm}$ . Kẻ dây cung  $DC$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ .

1) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông và tính độ dài  $AC$ .

2) Tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$  cắt  $BC$  tại  $E$ . Chứng minh  $\triangle CDB$  cân và  $\frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$ .

3) Gọi  $I$  là trung điểm của  $EA$ ; đoạn  $IB$  cắt  $(O)$  tại  $Q$ . Chứng minh  $CI$  là tiếp tuyến của  $(O)$  và từ đó suy ra góc  $ICQ =$  góc  $CBI$ .

4) Tiếp tuyến tại  $B$  của  $(O)$  cắt  $IC$  tại  $F$ . Chứng minh ba đường thẳng  $IB, HC, AF$  đồng quy.

**Câu 6.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại điểm  $H$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AH, BC$ . Các phân giác của góc  $\widehat{ABH}, \widehat{ACH}$  cắt nhau tại  $P$ .

a) Chứng minh 5 điểm  $B, C, E, P, F$  nằm trên một đường tròn. Điểm  $P$  là trung điểm cung nhỏ  $EF$ .

b) Ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC}$  là góc lớn nhất. Các điểm  $P, Q$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho

$\widehat{QAB} = \widehat{BCA}, \widehat{CAP} = \widehat{ABC}$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm đối xứng của  $A$  qua  $P, Q$ . Chứng minh rằng:  $BN, CM$  cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Câu 8.** Cho hình vuông  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Trên cung nhỏ  $AD$  lấy điểm  $E$  ( $E$  không trùng với  $A$  và  $D$ ). Tia  $EB$  cắt các đường thẳng  $AD, AC$  lần lượt tại  $I$  và  $K$ . Tia  $EC$  cắt các đường thẳng  $DA, DB$  lần lượt tại  $M, N$ . Hai đường thẳng  $AN, DK$  cắt nhau tại  $P$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $EPND$  là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  $\widehat{EKM} = \widehat{DKM}$ .

c) Khi điểm  $M$  ở vị trí trung điểm của  $AD$ . Hãy xác định độ dài đoạn  $AE$  theo  $R$ .

**Câu 9.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Giả sử  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $AB$  ( $M$  không trùng  $A, B$ ),  $N$  là điểm thuộc tia  $CA$  ( $N$  nằm trên đường thẳng  $CA$  sao cho  $C$  nằm giữa  $A$  và  $N$ ) sao cho khi  $MN$  cắt  $BC$  tại  $I$  thì  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  cắt  $(O)$  tại điểm  $P$  khác  $A$ .

a) Chứng minh rằng các tứ giác  $BMIP$  và  $CNPI$  nội tiếp.

b) Giả sử  $PB = PC$ , chứng minh rằng tam giác  $ABC$  cân.

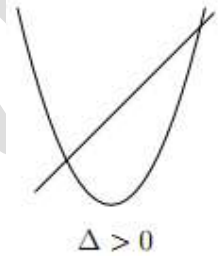
Toán lớp 9: Nền tảng chuyên  
TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:..... Ngày học:.....

Xét đường thẳng: (d):  $y = bx + c$  và parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ). Số giao điểm của đường thẳng (d) và (P) là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm  $ax^2 = bx + c \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0$ . (\*)

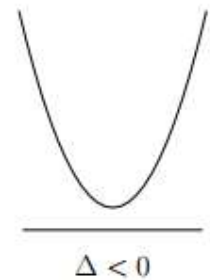
• Phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt:  $\Delta > 0$  thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.



• Phương trình (\*) có nghiệm kép:  $\Delta = 0$  thì (d) tiếp xúc (P).



• Phương trình (\*) vô nghiệm:  $\Delta < 0$  thì (d) không cắt (P).



**Dạng 1. Tìm tham số để đường thẳng (d):  $y = mx + n$  và parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A; B$  thỏa mãn biểu thức đối xứng đối với  $x_A; x_B$ .**

**Phương pháp:** Xét phương trình hoành độ giao điểm  $ax^2 - mx - n = 0$ . (\*)

• **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (\*) có 2 nghiệm phân biệt hay  $\Delta > 0$ .

• **Bước 2:** Biến đổi biểu thức đối xứng đối với  $x_A; x_B$  để biểu thức đó có chứa  $x_A + x_B$  và  $x_A \cdot x_B$ , sau đó áp dụng định lý Vi-ét và giải ra tham số.

**Câu 1.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = 2(m-1)x - 2m + 5$ . Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2$  nhỏ nhất.

**Câu 2.** Cho parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - 1$ .

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B thuộc hai phía của Oy.

b) Chứng minh  $|x_A - x_B| \geq 2$ .

c) Giải sử  $x_A < x_B$ , tìm m để  $|x_A| > |x_B|$ .

**Câu 3.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - m - 2$ . Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $M = |x_1| + |x_2| = 5$ .

**Dạng 2. Tìm tham số để đường thẳng (d):  $y = mx + n$  và parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B thỏa mãn biểu thức không đối xứng đối với  $x_A; x_B$ .**

**Phương pháp:** Xét phương trình hoành độ giao điểm  $ax^2 - mx - n = 0$ . (\*)

• **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (\*) có 2 nghiệm phân biệt hay  $\Delta > 0$ .

• **Bước 2:** Áp dụng định lí Vi-ét và kết hợp điều kiện đề bài ta giải ra các nghiệm hay dựa vào tính chất các nghiệm, từ đó tính được m hay điều kiện của m. **Chú ý:** Đối chiếu điều kiện  $\Delta > 0$ .

**Câu 4.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và (d):  $y = 6 - 5mx$ . Với giá trị nào của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là  $x_1; x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 + 2x_2 = 1$ ?

**Câu 5.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = -2(m-2)x + m^2$ . Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt  $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$  với  $x_1 < x_2$ , thỏa mãn  $|x_1| - |x_2| = 6$ .

**Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d):  $y = (m+2)x + 3$  và

parabol (P):  $y = x^2$ . Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.

**Câu 7.** Cho Parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = 10mx - 9m$ . Tìm các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 - (10m-1)x_1 + 9m - 9x_2 = 0.$$

**Dạng 3. Tìm tham số để đường thẳng (d):  $y = mx + n$  và parabol (P):  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B thỏa mãn biểu thức có chứa  $y_A, y_B$ .**

**Phương pháp:** Xét phương trình hoành độ giao điểm  $ax^2 - mx - n = 0$ . (\*)

- **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (\*) có 2 nghiệm phân biệt hay  $\Delta > 0$ .
- **Bước 2:** Tính  $y_A, y_B$  theo  $x_A, x_B$  theo một trong hai cách: Theo phương trình của đường thẳng (d) hoặc theo phương trình của parabol (P).

Sau đó bài toán quy về biểu thức chứa  $x_A, x_B$  và cách giải giống **Dạng 1** hay **Dạng 2**.

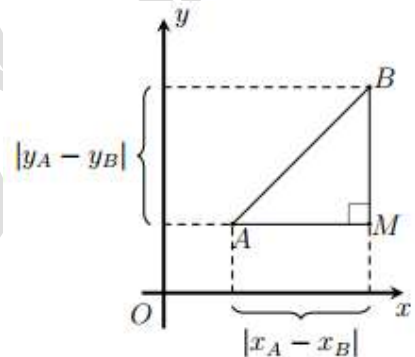
**Câu 8.** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + m - 1$ . Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  sao cho  $y_1 + y_2 + x_1x_2 = 5$ .

**Dạng 4. Bài toán có yếu tố hình học (độ dài đoạn thẳng, diện tích tam giác,...)**

- **Khoảng cách giữa hai điểm**  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ :

Từ đồ thị, áp dụng định lý pitago ta có

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$



**Câu 9.** Đường thẳng (d):  $y = -3x + 4$  cắt parabol (P):  $y = x^2$  tại A, B.

- Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.
- Cho điểm  $D(3; 0)$ , tìm tọa độ điểm  $E \in (P)$  sao cho độ dài DE ngắn nhất.

**Câu 10.** Gọi A, B là giao của parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + 3$ .

- Tìm m để AB ngắn nhất.
- Tính diện tích tam giác OAB theo m.
- Tìm m để tam giác OAB vuông tại O.