BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:...Ngày học:..

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

a. Phép cộng, trừ vectơ

+) Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \forall A, B, C$.

+) Quy tắc hình bình hành: Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

+) Qui tắc hình hộp: Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

+) Qui tắc trừ: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}, \forall A, B, C$.

b. Phép nhân vectơ với một số

Tích của số thực k và vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau:

+) cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \ge 0$.

+) ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

+) có độ dài $\left|k\vec{a}\right|=|k|.\left|\vec{a}\right|$.

c. Tính chất

+) I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ (M là một điểm bất kì trong không gian).

+) Nếu I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD thì ta có $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

+) G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (M là một điểm bất kì trong không gian).

+) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$ (M là một điểm bất kì trong không gian).

d. Hai vectơ cùng phương

+) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\left(\vec{b}\ne\vec{0}\right) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\vec{a}=k.\vec{b}$.

+) A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$.

e. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Tính chất:

+) $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

+) $\left|\vec{a}\right|^2=\left(\vec{a}\right)^2$. +) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$. +) $\vec{a}\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$.

+) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$. +) $\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$.

2. Vectơ đồng phẳng

a. Định nghĩa

+) Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

+) Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương. Khi đó:

Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng là có các số thực m,n sao cho $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$. Hơn nữa các số m,n là duy nhất.

c. Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

+) Nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{v}$ bất kì, ta đều tìm được các số m,n,p sao cho $\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$. Hơn nữa các số m,n,p là duy nhất.

DẠNG 1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Chứng minh $\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AM}$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P,Q sao cho $3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MP}+\frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$.

DẠNG 2. BIỂU DIỄN 1 VECTƠ QUA 3 VECTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh a. Điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh BC sao cho $AM=CN=k$ $\left(0<k<a\right)$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo ba vectơ $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên đoạn AC và DC' sao cho $MN//BD'$. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right)$.

DẠNG 3. TÍNH GÓC GIỮA 2 VECTƠ, TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC

a. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b. Tính góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{HC}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. G là trọng tâm tam giác $B'C'D'$ và I là trung điểm của AB'.

a. Tính độ dài đoạn thẳng IG.

b. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{IG}$.

DẠNG 4. CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi: $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D'}$, M là trung điểm của BB'. Chứng minh ba điểm P, Q, M thẳng hàng.

DẠNG 5. CHỨNG MINH 3 VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Các điểm M và N lần lượt thuộc các cạnh BC và AD, sao cho $BM = 2MC$, $AN = 2ND$.Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BB' và $A'C'$, M là điểm chia đoạn $B'C'$ theo tỉ số $-\frac{1}{2}$. Chứng minh 3 vectơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM}$ đồng phẳng.

DẠNG 6. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, N là điểm trên cạnh $A'C$ sao cho $\overrightarrow{A'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh đường thẳng MN song song với $(BC'D)$.

DẠNG 7. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB. Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC, JB = 3JD$. Gọi E là giao điểm của AD với $mp(IJK)$, O là giao điểm của CD với (IJK). Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}, \frac{OC}{OD}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC, O là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm của AN và DM. Chứng minh S, K, O thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{KS}{KO}$.

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

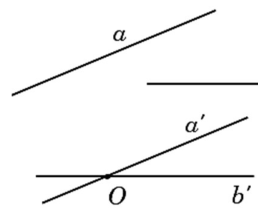
1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

$\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Cách 1: Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta lấy điểm O bất kì, qua O dựng $a'//a,\ b'//b$

$$\Rightarrow (a,b) = (a',b')$$



Cách 2: Tìm hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt của hai đường thẳng a, b. Khi đó góc giữa hai đường thẳng xác định bởi $\cos(a,b) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Chú ý:

+) Giả sử $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của a, $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của b, $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$. Khi đó:

$$(a,b) = \begin{cases} \alpha & khi \quad 0° \le \alpha \le 90° \\ 180° - \alpha & khi\ 90° < \alpha \le 180° \end{cases}.$$

+) Nếu B hoặc $a \equiv b$ thì $(a,b) = 0°$ +) $0° \le (a,b) \le 90°$.

3. Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa $a \perp b \Leftrightarrow (a,b) = 90°$

Chú ý:

+) $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của a, $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của b. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

+) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Tính giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB$ và $CA = CB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SC} \perp \overrightarrow{AB}$.

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2a$. Gọi H là trọng tâm tam giác BCD.

a. Xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

b. Tính $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$.

DẠNG 2. TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc BC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính góc của các đường thẳng:

a. SD, BC.

b. JI, BD.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a. MN và $C'D'$.

b. BD và AD'.

DẠNG 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. Chứng minh đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SAB, SAD là các tam giác vuông tại A. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Chứng minh EF vuông góc với SC.

Giáo viên: Trần Lê Cường

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11
GIỚI HẠN DÃY SỐ
Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:..Ngày học:...

I. Định nghĩa

1. Định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số

- Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là** 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

- Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (v_n) **có giới hạn là** a khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số

- Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là** $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) **có giới hạn là** $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

II. Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số.

Giới hạn hữu hạn	**Giới hạn vô cực**
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0;\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k} = 0\,(k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad (\lvert q\rvert < 1)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C$ **2. Định lí:** a) Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = b$ thì	**1. Giới hạn đặc biệt:** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty(k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty(q > 1)$ **2. Định lí:** a) Nếu $\lim\lvert u_n\rvert = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$. b) Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = 0$ c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & (a.v_n > 0) \\ -\infty & (a.v_n < 0) \end{cases}$

• $\lim(u_n+v_n)=a+b$ • $\lim(u_n-v_n)=a-b$ • $\lim(u_n.v_n)=a.b$ • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$ b) Nếu $u_n\geq 0;\forall n$ và $\lim u_n=a$ thì $a\geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ c) Nếu $\lvert u_n\rvert\leq v_n;\forall n$ và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$ d) Nếu $\lim u_n=a$ thì $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$	d) Nếu $\lim u_n=+\infty$, $\lim v_n=a$ thì $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & (a>0)\\ -\infty & (a<0)\end{cases}$

PHẦN 1. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn 0

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0:

Định nghĩa: Ta nói rằng dãy số (U_n) có giới hạn 0 , nếu với mọi số dương nhỏ bao nhiêu tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim(u_n)=0$ hay $u_n\to 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

Bằng cách sử dụng các kí hiện toán, định nghĩa trên có thể viết như sau:

$\lim u_n=0\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\exists n_0:n>n_0\Rightarrow\lvert u_n\rvert<\varepsilon\right)$.

Nhận xét:

- Dãy số (U_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $\lvert(U_n)\rvert$ có giới hạn 0 .
- Dãy số không đổi (U_n) , với $U_n=0$ thì dãy số có giới hạn 0 .(hay $\lim 0=0$)

2. Một số dãy số có giới hạn 0

$lim\frac{1}{n}=0$ $\qquad lim\frac{1}{n^2}=0$ $\qquad lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

$lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $\qquad lim\frac{1}{n^\alpha}=0$ $\qquad lim\frac{k}{n^\alpha}=0$

3. Định lí:

Định lí 1: Cho hai dãy số: $u_n,v_n:\begin{cases}\lvert u_n\rvert\leq v_n\\ \lim(v_n)=0\end{cases}\Rightarrow\lim u_n=0$

Định lí 2: Nếu $\lvert q\rvert<1\to limq^n=0$

Câu 1. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0

a. $u_n = \dfrac{(-1).\cos n}{n^4}$ b. $\dfrac{(-1)^n \sin^2(2n-1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ c. $\dfrac{1}{n(2n+3)}$ d. $\dfrac{(-1)^n \sin n+1}{n^2}$

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

a. Chứng minh rằng: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{2}{3}$ với mọi n

b. Chứng minh rằng: $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. Chứng minh dãy số có giới hạn 0

Câu 3. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0

a. $u_n = \dfrac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$ b. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$ c. $u_n = \dfrac{n+\cos\dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$ d. $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}$

Câu 4. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn là 0: $u_n = \dfrac{n^n (n+2)^n}{(2n+2)^{2n}}$

Câu 5. Chứng minh rằng:

a. $\lim 2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$ b. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

I. Định nghĩa:

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L, nếu $\lim(u_n - L)=0$.

Kí hiệu: $\lim(u_n - L)=0 \Leftrightarrow \lim u_n = L$

II. Định lý:

Cho (u_n) mà $u_n = c, \forall n : \lim u_n = c$

Định lý 1:

$$\lim u_n = L \Rightarrow \begin{cases} \lim|u_n| = |L| \\ \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L} \end{cases}$$

Nếu $u_n \ge 0$ thì $L \ge 0$ thì $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{\lim u_n}$

Định lý 2:

Giả sử $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

$\lim(u_n+v_n)=L+M$ $\lim(u_n-v_n)=L-M$

$\lim(u_n.v_n)=L.M$ $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{L}{M}$ $\lim(c.u_n)=c.L$

Dạng 2.1. Chứng minh đẳng thức $\lim u_n = A$ bằng định nghĩa

Câu 6. Cho dãy số (v_n) với $v_n=\frac{1}{n^3}+2$. Bằng định nghĩa hãy chứng minh rằng $\lim v_n=2$.

Câu 7. Chứng minh rằng: $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+5\right)=5$

Câu 8. Chứng minh rằng $\lim\frac{6n+2}{n+5}=6$

Câu 9. Chứng minh: $\lim\frac{1-2\text{n}}{\sqrt{\text{n}^2+1}}=-2$.

Dạng 2.2. Tìm giới hạn của dãy số có giới hạn hữu hạn

Thông thường ta sẽ gặp các dạng toán cơ bản sau

1) Gặp giới hạn của (u_n) trong đó u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n),Q(n)$ là hai đa thức chứa của n).

Phương pháp:

Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc là rút n^k làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn và $\lim\frac{a}{n^k}=0\,(k>0)$ để tính.

2) Gặp giới hạn của dãy (u_n) là biểu thức chứa n dưới dấu căn.

Phương pháp

- Khi (u_n) là một phân thức

TH1: Đưa n^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ cao nhất của n trong dấu căn) và áp dụng trực tiếp định lí về giới hạn

TH2: Khi đưa n^k ra ngoài dấu căn mà giới hạn vẫn vô định (mẫu tiến đến 0) thì ta phải nhân và chia với biểu thức liên hợp của biểu thứa chứa căn tiến về 0.

- Khi u_n không là phân thức: u_n có dạng $\sqrt{A}-\sqrt{B},\sqrt{A}-B,\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$.... thì ta nhân và chia với lượng liên hợp đưa về dạng phân thức

Chú ý:

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$

3) Gặp giới hạn mà u_n là một phân thức mà tử và mẫu của nó là biểu thức các lũy thừa có dạng $a^n, b^n\left(n\in\mathbb{N}\right)$...trong đó các cơ số a,b là các hằng số

Phương pháp:

Chia tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số có trị tuyệt đối lớn nhất trong các lũy thừa ở tử và mẫu.

Áp dụng $\lim q^n=0\left(|q|<1\right)$ và các quy tắc để tính

4) Giới hạn của dãy xác định bởi một công thức truy hồi

Phương pháp

Tìm công thức tính u_n theo n, từ đó tìm $\lim u_n$.

Hoặc chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (bawfng cách chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.

Chú ý rằng: Nếu $\lim u_n=a$ thì $\lim u_{n+1}=\lim u_{n+2}=a$

5) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp

a) Định nghĩa: Cấp số nhân vô hạn $\left(u_n\right)$ có công bội q với $|q|<1$ gọi là một cấp số nhân lùi vô hạn.

b) Định lí: Gọi $S=u_1+u_2+...+u_n+...$ là một tổng của cấp số nhân đã cho, ta có $S=\dfrac{u_1}{1-q}$

6) Giới hạn của dãy số mà u_n có dạng $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ hay $u_n=\underset{k=1}{\overset{n}{\pi}}a_k$

Phương pháp:

Cách 1: Dùng sai phân thu gọn u_n, dựa vào đó tìm $\lim u_n$

Cách 2: Sử dụng định lí kẹp: Cho ba dãy số $\left(u_n\right),\left(v_n\right),\left(\mathrm{w}_n\right)$ thỏa mãn $v_n\le u_n\le \mathrm{w}_n$ với mọi n và $\lim v_n=\lim w_n=L\left(L\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow \lim u_n=L$

Câu 10. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\dfrac{n+1}{n^2-2}$. b. $\lim\dfrac{n\left(n+1\right)}{\left(n+4\right)^3}$. c. $\lim\dfrac{3n^3-2n+5}{2n^2+5n-3}$. d. $\lim\dfrac{2n^3}{n^4+3n^2+1}$.

Câu 11. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\dfrac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$. b. $\lim\dfrac{1+3^n}{4+3^n}$. c. $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$. d. $\lim\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Câu 12. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{1-\text{sinn}\,\pi}{n+1}$. b. $\lim \frac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}$.

Câu 13. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{n+n\sqrt{n}}$. b. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}+2}{n+\sqrt{n}}$. c. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}}{\sqrt{n^2-4n+5}}$.

Câu 14. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$

c) $\lim\left(3n-\sqrt{9n^2+1}\right)$ d) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n}-n\right)$

Câu 15. Tìm giới hạn:

a) $\lim\left(n-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n+1\right)$

Câu 16. Tìm giới hạn

a. $\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right]$ b. $\lim\left[1-0{,}1+0{,}1^2-0{,}1^3+\ldots+(-1)^n.0{,}1^n\right]$

Câu 17. Tìm giới hạn

a. $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right]$.

b. $\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{(n+1)}}\right]$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=u_n+3,\forall n\in N,\text{n}\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\frac{u_n}{5n+2020}$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^n};\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Tính $\lim(u_n-2)$

Câu 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=2019\\ u_{n+1}=\frac{3}{u_n+2};\forall n\in\mathbb{N}*\end{cases}$. Tính giới hạn của dãy (u_n).

Câu 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=u_n^2+\frac{1}{3}u_n;\forall n\in\mathbb{N}*\end{cases}$.

Tính giới hạn của dãy (u_n).

Câu 22. Cho hình vuông cạnh bằng a. Người ta lấy bốn trung điểm các cạnh của hình vuông trên để được hình vuông nhỏ hơn nằm bên trong hình vuông bên ngoài. Quy trình làm như vậy diễn ra tới vô hạn. Tính diện tích tất cả hình vuông có trong bài toán.

Dạng 3: Dãy số có giới hạn vô hạn

I. Dãy số có giới hạn vô han (vô cực, vô cùng)

Định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số

- Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là** $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) **có giới hạn là** $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn vô cực

Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty (k \in \mathbb{Z}^+)$$
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty (q > 1)$$

Định lí:

Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & (a.v_n > 0) \\ -\infty & (a.v_n < 0) \end{cases}$

Nếu $\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = a$ thì $\lim(u_n.v_n) = \begin{cases} +\infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$

Câu 23. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(n^3 + n^2 + n + 1\right)$ b. $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} - 1\right)$ c. $\lim\left(n - \sin 2n\right)$ d. $\lim \dfrac{1}{n + \cos^2 n}$

Câu 24. Tìm giới hạn

a. $\lim\left(\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} - n\right)$ b. $\lim\left(n + \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$

Câu 25. Tìm giới hạn

a. $\lim \dfrac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$ b. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$ c. $\lim \dfrac{n\sqrt{n} + \sqrt[3]{n^2 + 2} + n^3}{n^2 + n\sqrt{n} - 12}$

Câu 26. Tìm giới hạn

a. $\lim \dfrac{3^n - 4^{n+1}}{2^{n+3} + 3^n}$ b. $\lim \sqrt{2^n - n + 1}$ c. $\lim \left(4^n + 2.3^n - 3.2^n - 1\right)$

Câu 27. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n = -n^4 - 50n + 11$ b. $u_n = \sqrt[3]{7n^2 - n^3}$

c. $u_n = \sqrt{5n^2 - 3n + 7}$ d. $u_n = \sqrt{2n^3 + n^2 - 2}$

Câu 28. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Câu 29. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{2n - 3^n}{n + 2^n}$

Câu 30. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a. $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4}$ b. $u_n = \dfrac{13.3^n - 5n}{3.2^n + 5.4^n}$

TRẮC NGHIỆM

Câu 31. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**.

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim (u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Câu 32. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - a) = 0$.

B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 33. Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 34. Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 35. Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n - 2| < \frac{1}{n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n = 1$. **C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = 2$.

Câu 36. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0 \ (|q| > 1)$.

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \ (k > 1)$.

Câu 37. Tính $L = \lim \frac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L = 1$. **B.** $L = 0$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = 2$.

Câu 38. $\lim \frac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 39. $\lim \frac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 40. Tìm $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 41. $\lim \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{-3}{5}$. **D.** -3.

Câu 42. $\lim \dfrac{2018}{n}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 43. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L = -\infty$. **B.** $L = -2$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = 0$.

Câu 44. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n = \dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Câu 45. Tính $I = \lim \dfrac{2n-3}{2n^2+3n+1}$

A. $I = -\infty$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = +\infty$. **D.** $I = 1$.

Câu 46. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2-1}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 47. Tính giới hạn $\lim \left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Giáo viên: Nguyễn Thành Long