

Toán lớp 8: Nền tảng chuyên  
CHÙM BÀI TOÁN TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG

Tài liệu lớp học Zoom 8A0 - 14h30 - 17h45 - Chiều chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: ..... Ngày học: .....

**Câu 1.** Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh  $\frac{BH \cdot CH}{AB \cdot AC} + \frac{CH \cdot AH}{BC \cdot BA} + \frac{AH \cdot BH}{CA \cdot CB} = 1$ .

**Câu 2.** Cho tam giác ABC nhọn, trên các đường cao BE, CF lấy các điểm theo thứ tự I, K sao cho  $\widehat{AIC} = 90^\circ, \widehat{AKB} = 90^\circ$

a) CMR: AI = AK.

b) Cho  $A = 60^\circ, S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ , Tính diện tích tam giác AEF.

**Câu 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm của AC, F là hình chiếu của I trên BC, trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng chứa AC, vẽ tia Cx vuông góc với AC cắt IF tại E. Gọi giao của AH, AE với BI theo thứ tự tại G và K. Chứng minh

a)  $\triangle IHE$  và  $\triangle BHA$  đồng dạng

b)  $\triangle BHI$  và  $\triangle AHE$  đồng dạng

c) AE vuông góc với BI.

**Câu 4.** Cho hình chữ nhật ABCD, nối AC, kẻ DE vuông góc với AC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE, DE, nối MN, ND, CP. Chứng minh

a)  $\triangle AND$  và  $\triangle DPC$  đồng dạng.

b) ND và MN vuông góc với nhau.

**Câu 5.** Cho hình vuông ABCD cạnh a, một đường thẳng d bất kỳ đi qua C cắt AB tại E và AC tại F.

a) CMR tích BE.DF không đổi khi d di chuyển.

b) CMR:  $\frac{BE}{BF} = \frac{AE^2}{AF^2}$ .

c) Xác định vị trí của d để DF = 4 . BE

**Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, Gọi P và Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH. Chứng minh:

a)  $\triangle ABP$  và  $\triangle ACQ$  đồng dạng

b) AP vuông góc với CQ.

**Câu 7.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, H là trung điểm của BC, I là hình chiếu của H trên AC và O là trung điểm của HI.

a) CMR:  $\triangle BIC$  và  $\triangle AOH$  đồng dạng.

b) AO vuông góc với IC.

Giáo viên: Thầy Trần Ngọc Hà

Toán lớp 8: Nền tảng chuyên  
**BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI – BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - SCHWARZ**  
Tài liệu lớp học Zoom 8A0 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: ..... Ngày học: .....

**Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz.**

\* Với 2 cặp số:  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

\* Với 3 cặp số:  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

\* Tổng quát: Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n, (n \geq 2)$  khi đó

$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

\* Hệ quả - Bất đẳng thức Cộng mẫu:

$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x + y + z) \geq (a + b + c)^2$  với  $x, y, z > 0$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

**Chú ý: BĐT hay dùng kèm theo để nhìn nhanh**

$+(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$  với  $a, b, c > 0$

$+3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

**Bài tập**

**Câu 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{36}{a + b + c}$ .

**Câu 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{a + b + c}{2}$ .

**Câu 3.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq 1$ .

**Câu 4.** Cho 3 số dương  $a, b, c$ . Chứng minh  $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$  (BĐT Nasobit).

**Câu 5.** Cho  $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của:  $P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

**Câu 6.** Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác có  $p$  là nửa chu vi thì

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

**Câu 7.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}.$$

**Câu 8.** Tìm GTNN của  $M = \frac{x^6}{y^3+z^3} + \frac{y^6}{x^3+z^3} + \frac{z^6}{x^3+y^3}$  với  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn

$$x + y + z = 1.$$

**Câu 9.** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . CM:  $M = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$ .

**Câu 10.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z \geq 2021$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}}.$$

**Câu 11.** Cho ba số thực  $a, b, c > 0$  thỏa mãn:  $a + b + c \geq 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b}.$$

**Câu 12.** Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh  $M = \frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b} \geq \frac{1}{2}$ .

**Câu 13.** Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$ .

**Câu 14.** Chứng minh  $\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$ .

**Câu 15.** Cho  $a, b, c > 0$ , chứng minh  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ .

**Câu 16.** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh:  $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$

**Câu 17.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thay đổi thỏa mãn  $a + b + c = 2022$ . Tìm Min của:

$$A = \frac{a^2}{(a+2b)^3} + \frac{b^2}{(b+2c)^3} + \frac{c^2}{(c+2a)^3}$$

**Câu 18.** Cho các số  $a, b, c$  dương:  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+4a} + \frac{1}{3+9b} + \frac{1}{6+36c} \geq \frac{1}{2}$$

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt