BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học zoom – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên: ....Ngày học: ....

HÌNH HỌC

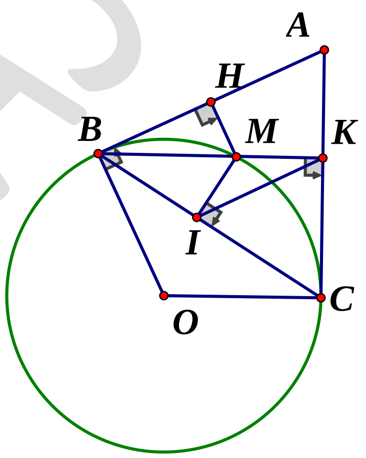
Ví dụ 12. Cho đường tròn (O) và dây cung BC không đi qua tâm O. Hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại A. Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC

a) Chứng minh các tứ giác $MIBH, MICK$ nội tiếp

b) Chứng minh $MI^2 = MH.MK$

c) Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PQ, PR tới đường tròn với Q, R là các tiếp điểm. Đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F (E nằm giữa P và F, dây cung EF không đi qua tâm O). Gọi I là trung điểm của EF, K là giao điểm của PF và QR. Chứng minh rằng $\frac{2}{PK} = \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF}$

HD:



a) Chứng minh các tứ giác $MIBH, MICK$ nội tiếp

Ta có :

$MI \perp BC \Rightarrow \angle MIB = 90°;\ MH \perp AB \Rightarrow \angle MHB = 90°$

$\Rightarrow \angle MIB + \angle MHB = 180°$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên $MIBH$ là tứ giác nội tiếp

Ta có :

$MI \perp BC \Rightarrow \angle MIC = 90°;\ MK \perp AC \Rightarrow \angle MKC = 90°$

$\Rightarrow \angle MIC + \angle MKC = 180°$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Nên $MICK$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $MI^2 = MH.MK$

*Ta có $MIBH$ nội tiếp nên $\angle MHI = \angle MBI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IM)

$MICK$ nội tiếp nên $\angle MIK = \angle MCK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MK)

Xét (O) có $\angle MBI = \angle MKC$ (cùng chắn cung CM) $\Rightarrow \angle MHI = \angle MIK$

*Tứ giác $BIMH$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MIH = \angle MBH$ (cùng chắn cung MH)

Tứ giác $CIMK$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MKI = \angle MCI$ (cùng chắn cung IM)

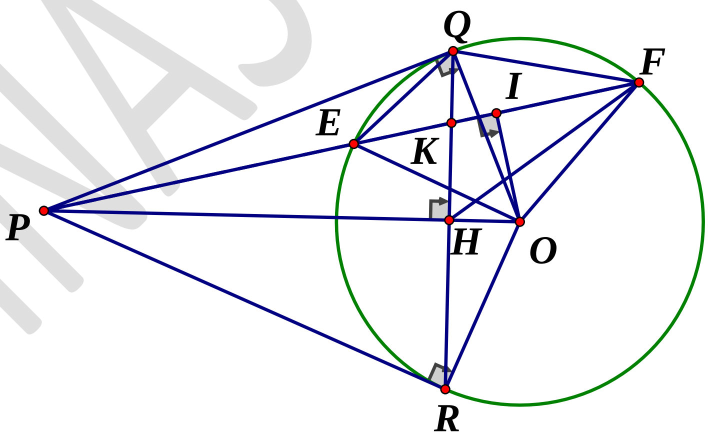
Xét (O) có $\angle MBH = \angle MCB$ (cùng chắn cung BM) $\Rightarrow \angle MIH = \angle MKI$

Xét tam giác MIH và tam giác MKI có :

$\angle MHI = \angle MIK (cmt); \angle MIH = \angle MKI (cmt) \Rightarrow \Delta MIH \backsim \Delta MKI (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MI}{MK} = \dfrac{MH}{MI} \Rightarrow MI^2 = MH.MK$

c) Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PQ, PR tới đường tròn với Q, R là các tiếp điểm. Đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F (E nằm giữa P và F, dây cung EF không đi qua tâm O). Gọi I là trung điểm của EF, K là giao điểm của PF và QR. Chứng minh rằng $\dfrac{2}{PK} = \dfrac{1}{PE} + \dfrac{1}{PF}$



$\dfrac{2}{PK} = \dfrac{1}{PE} + \dfrac{1}{PF} \Rightarrow 2.PE.PF = PK(PE + PF) \Leftrightarrow 2.PE.PF = (PE + EK)(PE + EF)$

$\Leftrightarrow 2.PE.PF = PE^2 + PE.PF + EK.PE + EK.PF$

$\Leftrightarrow PE.PF - PE^2 - PE.EK = EK.PF \Leftrightarrow PE.(PF - PE - EK) = EK.PF$

$\Leftrightarrow PE.KF = EK.PF \, (*)$

Gọi H là giao điểm của $PO \& QR$

PQ, PR là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow PQ = PR$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Lại có $OQ = OR = R \Rightarrow PO$ là đường trung trực của đoạn QR

$\Rightarrow PO \perp QR \Rightarrow PO \perp QH$

Tam giác PQO vuông tại Q, đường cao QH, ta có :

$PQ^2 = PH.PO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

Xét (O) có: $\angle PFQ = \angle PQE$ (cùng chắn cung QE)

Xét ΔPQE và ΔPFQ có :

$\angle QPF \; chung; \; \angle PFQ = \angle PQE \, (cmt)$

$\Rightarrow \Delta PQE \backsim \Delta PFQ (g.g) \Rightarrow \dfrac{PQ}{PF} = \dfrac{PE}{PQ} \Rightarrow PQ^2 = PE.PF \, (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $PH.PO = PE.PF \Rightarrow \dfrac{PH}{PE} = \dfrac{PF}{PO}$

Xét ΔPEH và ΔPOF có : $\angle OPF \; chung \, ; \dfrac{PH}{PE} = \dfrac{PF}{PO} (cmt)$

$\Rightarrow \Delta PEH \backsim \Delta POF (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle EHP = \angle PFO$ mà hai góc này cùng bù với $\angle OHE$ nên $HEFO$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle OHF = \angle OEF$ (cùng nhìn cạnh OF)

Mà $\angle OEF = \angle OFE = \angle PHE \Rightarrow \angle OHE = \angle PHE \Rightarrow \angle EHK = \angle FHK$

Từ đó suy ra HK, HP lần lượt là phân giác trong, phân giác ngoài của $\angle EHF$

$\Rightarrow \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{KE}{KF} \Rightarrow PE.KF = EK.PF$

Suy ra (*) đúng (đpcm)