

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG - 18h00 - 21h15 - Tối thứ 2

Họ và tên:Ngày học:

Ca 1:

Câu 4. Chứng minh rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

HD:

+ Ta có:

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505}$$

$$A > \frac{96}{505} > \frac{96}{567} = \frac{1}{6}$$

+ Ta cần chứng minh: $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Ta làm tương tự như sau :

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

Vậy: $\frac{1}{6} < A < \frac{1}{4}$.

Câu 7. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{1}{3}$.

HD:

$$A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}$$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{2016}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2015}} \right) - \frac{2016}{5^{2016}}$$

Đặt $B = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2015}} \right)$

$$\Rightarrow 5B = 1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{2014}}$$

$$\Rightarrow 4B = 1 - \frac{1}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}}$$

Thay vào A ta được:

$$4A = 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}} \right) - \frac{2016}{5^{2016}}$$

$$4A = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{5}{16} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Ca 2:

Câu 4. Một trường học có 600 học sinh và 19 lớp. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 lớp học có từ 32 học sinh trở lên.

HD:

Ta có: $600 = 19 \cdot 31 + 11$.

Theo nguyên lí Dirichlet, với 600 học sinh chia vào 19 lớp thì tồn tại ít nhất một lớp có không dưới 32 học sinh (đpcm).

Câu 6. Có 25 số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ 4 chữ số 1, 2, 3, 4. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 trong số 25 số đó giống nhau.

HD:

+ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ 4 chữ số 1,2,3,4 là \overline{abcd}

(a,b,c,d là các chữ số 1 hoặc 2 hoặc 3 hoặc 4, đôi một khác nhau).

+ Ta có:

a có 4 lựa chọn.

Sau khi chọn a, b có 3 lựa chọn.

Sau khi chọn a, b thì c có 2 lựa chọn.

Sau khi chọn a, b, c thì d có 1 lựa chọn.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4 là: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số.

+ Theo đề bài có 25 số trong tổng số 24 số khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất có hai số giống nhau. (đpcm)

Câu 7. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

HD:

Có $45 - 2 = 43$ học sinh phân chia vào 8 loại điểm (từ 2 đến 9 điểm).

Ta có: $43 = 5 \cdot 8 + 2$

Theo nguyên lí Dirichlet, với 43 học sinh chia vào 8 nhóm điểm (từ 2 đến 9 điểm) thì tồn tại ít nhất 1 nhóm điểm có 6 bạn.

Megamath