

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6**

**BẤT ĐẲNG THỨC VỀ PHÂN SỐ**

**Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG - 18h00 - 21h15 - Tối thứ 2**

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**1. Bất đẳng thức phân số với một vế là tổng phân số có quy luật.**

Câu 1. Chứng tỏ  $\frac{49}{100} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Câu 2. Chứng tỏ  $A = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$  không phải là một số nguyên.

Câu 3. Chứng tỏ  $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2022^2} < \frac{1}{2}$ .

Câu 4. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Câu 5. Chứng minh  $A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

Câu 6. Chứng tỏ  $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$ .

Câu 7. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{4} < A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{1}{3}$ .

Câu 8. Chứng minh rằng:  $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

**2. Phương pháp chia để trị chứng minh bất đẳng thức phân số.**

Câu 9. Cho  $S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14}$ , CMR:  $1 < S < 2$

Câu 10. Cho  $M = \frac{5}{11} + \frac{5}{12} + \frac{5}{13} + \frac{5}{14}$ , chứng tỏ  $1 < M < 2$ .

Câu 11. Cho  $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$

a) Chứng minh A không có giá trị nguyên

b) Chứng minh  $A > \frac{7}{12}$

c) Chứng minh  $A < \frac{5}{6}$

Câu 12. CMR:  $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Câu 13.  $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{80}$ . Chứng minh  $1 < A < 2$

**Câu 14.** Chứng minh  $B = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} > \frac{1}{3}$

**Câu 15.**

a) So sánh  $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17}$  với số 3.

b) So sánh A với  $B = \frac{2020}{2021} + \frac{2021}{2022} + \frac{2022}{2020}$

c) Chứng minh A không là số tự nhiên.

**Câu 16.** Chứng minh  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$

**Câu 17.**

a) Tính số số hạng trong dãy số  $\frac{1}{2^n + 1}, \frac{1}{2^n + 2}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}$ .

b) Chứng minh  $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2021}} > 1010$

c) Chứng minh  $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2021} - 1} < 2021$

**Câu 18.** Cho  $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$

Chứng minh rằng:  $50 < M < 100$

**Câu 19.** So sánh  $A = \frac{2059}{1} + \frac{2058}{2} + \dots + \frac{2}{2058} + \frac{1}{2059}$  với 10000

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6**  
**CHỦ ĐỀ. NGUYỄN LÝ DIRICHLET**  
**Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG - 18h00 - 21h15 - Tối thứ 2**

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.**

- Xếp 3 con thỏ vào 2 chuồng luôn luôn có 1 chuồng ít nhất 2 con.
- Xếp  $k+1$  con thỏ vào  $k$  chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất 2 con.
- Xếp  $n$  con thỏ vào  $k$  chuồng thì luôn tìm được một chuồng lớn hơn hay bằng  $n/k$  con.
- Xếp  $n = qk+r$  ( $r > 0$  là số dư khi chia  $n$  cho  $k$ ) con thỏ vào  $k$  chuồng thì tồn tại 1 chuồng ít nhất  $q+1$  con.
- Xếp  $n = qk$  con thỏ vào  $k$  chuồng thì tồn tại một chuồng ít nhất  $q$  con.

**Câu 2.**

- Chứng minh rằng trong 3 người bất kì, có ít nhất 2 người có cùng giới tính.
- Chứng tỏ trong 367 người bất kì bao giờ cũng có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh.
- Có 22 viên bi thả vào 3 thùng, chứng minh có ít nhất 1 thùng có từ 8 viên bi trở lên.
- Chứng minh trong 8 số tự nhiên bất kì, có ít nhất 2 số khi chia cho 7 có cùng số dư (có hiệu chia hết cho 7).
- Tổng quát: Trong  $n+1$  số tự nhiên bất kì, luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho  $n$  (có cùng số dư).

**Câu 3.** Câu lạc bộ toán 6 nền tảng chuyên của trung tâm Megamath có 100 bạn tham gia, chứng minh rằng có ít nhất 9 người trong đó có cùng tháng sinh.

**Câu 4.** Một trường học có 600 học sinh và 19 lớp. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 lớp học có từ 32 học sinh trở lên.

**Câu 5.** Trong lớp có 30 học sinh. Khi viết chính tả em Hùng phạm 13 lỗi còn các em khác ít hơn. CMR có ít nhất 3 em học sinh có số lỗi như nhau (không mắc thì tính 0 lỗi).

**Câu 6.** Có 25 số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ 4 chữ số 1,2,3,4. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 trong số 25 số đó giống nhau.

**Câu 7.** Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

**Câu 8.** Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị -1,0 hoặc 1, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

**Câu 9.** Cho  $S$  là tập hợp 7 số tự nhiên thuộc từ 0 đến 10. CMR tồn tại 2 phần tử của  $S$  có tổng bằng 10.

**Câu 10.** Cho 7 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta luôn có thể tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3.

**Câu 11.** Cho 6 điểm trong đó 3 điểm nào cũng nối được với nhau tạo thành 1 tam giác có cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. CMR: Bao giờ cũng tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

**Câu 12.** Cho 10 số tự nhiên bất kỳ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10}$ . Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc tổng một số liên tiếp nhau trong dãy 10 số đã cho chia hết cho 10.

**Câu 13.** Cho 100 số tự nhiên tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại 10 số sao cho hiệu hai số bất kỳ đều chia hết cho 11.

**Câu 14.** Có hay không một số có dạng  $2022\ 2022\ \dots\ 2022\ 000\dots 000$  chia hết cho 2021.

**Câu 15.** Chứng minh rằng tồn tại một bội của 17 gồm toàn chữ số 2.

**Câu 16.** Chứng minh rằng tồn tại số có dạng  $1234\ 1234\dots 1234\ 00\dots 00$  chia hết cho 9999.

**Câu 17.** Trong một lớp học có 30 học sinh, chứng minh trong số 30 học sinh đó ta sẽ tìm thấy ít nhất 2 học sinh có tên bắt đầu bằng chữ cái giống nhau.

**Câu 18.** CMR trong các số tự nhiên  $2-1, 2^2-1, 2^3-1, \dots, 2^n-1$  trong đó  $n$  là số lẻ, lớn hơn 1, có ít nhất một số chia hết cho  $n$ .

**Câu 19.** Từ 5 số tự nhiên bất kỳ, hiệu có thể tìm được hai số mà hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 7.

**Câu 20.** Cho tám số tự nhiên có 3 chữ số. Chứng minh rằng trong 8 số đó, tồn tại hai số mà khi viết liên tiếp nhau thì tạo thành một số có sáu chữ số chia hết cho 7.

**Câu 21.** Cho bảng vuông gồm  $n.n$  ô vuông. Mỗi ô vuông ghi một trong các số 1; 0; 2. CMR không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột, trên hàng, trên đường chéo là các số khác nhau.

**Câu 22.** Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng  $111\dots 11$  mà chia hết cho  $p$ .

Giáo viên: Bùi Minh Mẫn