BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG – 18h00 – 21h15 – Tối thứ 2

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ca 1:

Câu 5. Cho $S=2+2^2+2^3+\ldots+2^{98}$, chứng tỏ S không là số chính phương.

HD:

Chú ý:

Nếu xét chữ số tận cùng:

$S=2+2^2+2^3+\ldots+2^{98}$

$\Rightarrow 2S=2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{99}$

$\Rightarrow 2S-S=2^{99}-2$

$\Rightarrow S=2^{4k+3}-2=2^3.\left(2^4\right)^k-2=8.(16)^k-2=(...8)-2=(...6)$

Nên không thể căn cứ vào chữ số tận cùng để lập luận.

Ta có:

$S=2+\left(2^2+2^3+\ldots+2^{98}\right)=2+2^2\left(1+2+...+2^{96}\right)=4k+2$ nên S không là số chính phương.

Câu 11. Chứng minh $A=3^{2^6}+4^{2^6}+5^{2^6}$ không là số chính phương.

HD:

Ta có : $3^{2^6}=3^{4.2^4}=(81)^{2^4}$ có tận cùng bằng 1.

$4^{2^6}=\left(4^2\right)^{2^5}=16^{2^5}$ có tận cùng bằng 6.

5^{2^6} có tận cùng bằng 5.

Do đó $A=3^{2^6}+4^{2^6}+5^{2^6}$ có tận cùng bằng 2 do đó không là số chính phương.

Câu 12. Chứng minh không tồn tại số chính phương lớn hơn 10 có tất cả các chữ số giống nhau.

HD:

Giả sử tồn tại số n^2 có tất cả các chữ số giống nhau.

Vì n^2 là số chính phương nên có tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6 hoặc 9.

- $n^2>10$ nên n^2 không thể tận cùng bằng 0.

- Nếu n^2 tận cùng bằng 5 thì n^2 tận cùng bằng 25 (loại)

- Nếu n^2 tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục phải là số chẵn, khác 1 và 9 (loại).

- Nếu n^2 tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục phải là số lẻ khác 6 (loại).

- Nếu n^2 tận cùng bằng 4 thì $n^2 = 44....4 = 4.11...1$. Mà $11...1$ không thể là số chính phương nên loại.

Vậy không tồn tại số chính phương có tất cả các chữ số bằng nhau.

Ca 2:

Câu 10. Cho 7 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta luôn có thể tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3.

HD:

Vì một số tự nhiên khi chia cho 3 ta thu được các số dư là 0, 1, 2.

Vì $7 = 2.3 + 1$ nên tồn tại 3 số tự nhiên trong 7 số khi chia cho 3 cho ta cùng một số dư.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho 3.

Câu 13. Cho 100 số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại 10 số sao cho hiệu hai số bất kỳ đều chia hết cho 11.

HD:

Khi chia cho 11 ta nhận được tất cả 11 số dư: 0, 1,…,10

Ta có: 100 = 9.11 + 1.

Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại 10 số sao cho chúng có cùng số dư khi chia cho 11.

Khi đó hiệu hai số bất kỳ trong 10 số đều chia hết cho 11. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 17. Trong một lớp học có 30 học sinh, chứng minh trong số 30 học sinh đó ta sẽ tìm thấy ít nhất 2 học sinh có tên bắt đầu bằng chữ cái giống nhau.

HD:

Bảng chữ cái tiếng việt có 29 chữ cái khác nhau.

Tên mỗi học sinh với chữ cái đầu tiên có 1 trong 29 lựa chọn khác nhau.

Vậy với 30 học sinh, tương ứng với 30 chữ cái đầu tiên; theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất 2 học sinh có chữ cái đầu tiên giống nhau.

Câu 21. Cho bảng vuông gồm n.n ô vuông .Mỗi ô vuông ghi một trong các số 1; 0; 2. CMR không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột, trên hàng, trên đường chéo là các số khác nhau.

HD:

Tổng các số trên cột hoặc trên hàng hoặc trên đường chéo có giá trị nhỏ nhất là 0.n = 0, giá trị lớn nhất là 2.n = 2n

Có 2n + 2 tổng (n cột, n hàng, 2 đường chéo nhận một trong 2n + 1 giá trị số nguyên từ 0 đến 2n. Theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau.