BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG – 18h00 – 21h15 – Tối thứ 2

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ca 1:

Câu 10.

a) Cho các số tự nhiên: 1,2,3,4,5,6. Lập tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số bao gồm tất cả các chữ số trên. Trong các số đã lập có số nào là số chính phương không?

b) Cho một số tự nhiên gồm 21 chữ số 4 . Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

HD:

a) Tổng các chữ số của các số là 21 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không có số chính phương.

b) Ta có $21.4 = 84 \vdots 3$ nhưng không chia hết cho 9 nên không có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương.

Câu 13. Cho 4 chữ số 0;2;3;4. Tìm số chính phương có 4 chữ số gồm cả 4 chữ số trên.

HD:

Gọi A là số chính phương có bốn chữ số cần tìm.

A không có tận cùng là 2 hoặc 3 nên chữ số tận cùng của A là 0 hoặc 4

- Nếu chữ số tận cùng của A là 0 thì chữ số hàng chục là 0 nên vô lý

- Nếu chữ số tận cùng của A là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn nên chữ số hàng chục là 0 hoặc 2

- A có thể là: 3204, 2304, 3024

Ta có: $56 < 3204 < 57^2; 2304 = 48^2; 54^2 < 3204 < 55^2$

Vậy số cần tìm là 2304.

Câu 14. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

HD:

Giả sử: $a = 2m+1, b = 2n+1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k+2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

Ca 2:

Câu 4. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau (mỗi đội phải đấu 1 trận với 5 đội khác). CMR vào bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

HD:

Giả sử 6 đội bóng đó là A,B,C,D,E,F. Xét đội A.

Theo nguyên lý Đirichlet ta suy ra: A phải đấu hoặc không đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát, giả sử A đã đấu với B,C,D.

Nếu B,C,D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

Nếu B,C,D có 2 đội đã đấu với nhau, ví dụ B và C thì 3 đội A,B,C từng cặp đã đấu với nhau.

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Câu 5. Có 17 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề. Mỗi người trao đổi với một người về 1 vấn đề. Chứng minh rằng cũng có ít nhất 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề (A và B, B và C, C và A).

HD:

Một nhà toán học trao đổi với 16 nhà toán học khác về 3 vấn đề. Ta có 16 = 5.3 + 1 nên theo nguyên lý Đirichlet có ít nhất 6 người sẽ được một người trao đổi về cùng một vấn đề, giả sử đó là vấn đề I.

Nếu 6 người này lại trao đổi với nhau về 3 vấn đề:

Trường hợp 1: Nếu có 2 người nào đó cùng trao đổi về vấn đề I thì bài toán được chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu không có 2 người nào cùng trao đổi về vấn đề 1 thì 6 người này chỉ trao đổi về 2 vấn đề II và III.

Một người trao đổi với 5 người còn lại về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên lý Điriclet có ít nhất 3 người cùng được một người trao đổi về 1 vấn đề, giả sử đó là vấn đề II. Ba người này lại tiếp tục trao đổi với nhau:

Trường hợp 1: Nếu có 2 người nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề II thì bài toán được chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu không có 2 người nào cùng trao đổi với nhau về vấn đề II thì cả 3 người này trao đổi với nhau về vấn đề III . Bài toán cũng đã được chứng minh.

Vậy luôn có ít nhất 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề

Câu 7. Chứng minh rằng trong mỗi nhóm bạn 5 người có ít nhất 2 người có cùng số lượng người quen giữa những người trong nhóm đó. Chứng minh rằng cùng kết luận như vậy với nhóm bạn có số lượng thành viên bất kỳ.

HD:

Chúng ta xét 5 "ngăn kéo", đánh số từ 0 đến 4 . Mỗi người tham dự được "đặt" vào ngăn kéo mang số trùng với số người trong nhóm mà người đó quen. Có hai trường hợp xảy ra:

a) Nếu có một người không quen ai cả trong số những người còn lại, thì ngăn số 4 là trống (vì ngược lại thì cả hai ngăn 0 và 4 đều không trống, dẫn đến vô lý). Như vậy, mỗi người trong số 5 người được đặt vào các ngăn mang số 0,1,2,3 với số lượng 4 ngăn. Từ nguyên lý Dirichlet suy ra ít nhất có 2 người trong 1 ngăn tức là họ có chung số người quen.

b) Nếu mọi người có ít nhất 1 người quen thì mỗi người sẽ được đặt vào các số số 1,2,3,4, với số lượng 4 ngăn. Phần còn lại áp dụng Nguyên lý Đirichlê.

Câu 11. Trong một khu tập thể có 123 người. Tổng số tuổi của họ là 3813. Chứng minh rằng có thể chọn 100 người ở khu tập thể này, mà tổng số tuổi của họ không nhỏ hơn 3100.

HD:

Chúng ta hãy chọn 100 người nhiều tuổi nhất và giả sử tổng số tuổi của họ nhỏ hơn 3100. Khi đó người trẻ nhất trong số người được chọn là $3100:100=31$ tuổi. Mặt khác người này không trẻ hơn 23 người còn lại theo cách chọn. Khi đó tổng số tuổi của 23 người này không lớn hơn $23\times 31=713$. Suy ra tổng số tuổi của tất cả mọi người sống trong tập thể nhỏ hơn $3100+713=3813$ dẫn đến vô lý.