BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 6 HSG – 18h00 – 21h15 – Tối thứ 2

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ca 1

Câu 13. $A=\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{80}$. Chứng minh $1<\mathrm{A}<2$

HD: Ta có:

$$A=\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{41}+\ldots+\frac{1}{80}\right)$$

$$A>\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\ldots+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{80}+\ldots+\frac{1}{80}\right)$$

$$A>\frac{20}{40}+\frac{40}{80}$$

$$A>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$A>1 \quad (*)$$

Lại có:

$$A=\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{41}+\ldots+\frac{1}{80}\right)$$

$$A<\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{40}+\ldots+\frac{1}{40}\right)$$

$$A<\frac{20}{20}+\frac{40}{40}$$

$$A<2 \quad (**)$$

Từ $(*),(**)\Rightarrow 1<A<2$

Câu 14. Chứng minh $\mathrm{B}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{149}+\frac{1}{150}>\frac{1}{3}$

HD:

$$\mathrm{B}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{149}+\frac{1}{150}$$

$$\mathrm{B}>\frac{1}{150}+\frac{1}{150}+\frac{1}{150}+\ldots+\frac{1}{150}$$

$\mathrm{B} > \dfrac{1}{150}.50 = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\mathrm{B}=\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{102}+\ldots+\dfrac{1}{149}+\dfrac{1}{150}>\dfrac{1}{3}$.

Câu 17. c) Chứng minh $B=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+....+\dfrac{1}{2^{2021}-1}<2021$

HD:

c) $B=1+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}\right)+....+\left(\dfrac{1}{2^{2020}}+\dfrac{1}{2^{2021}-1}\right)$

$$=1+\underbrace{\left(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^1+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2^3-1}\right)+....+\left(\dfrac{1}{2^{2020}}+\dfrac{1}{2^{2021}-1}\right)}_{2020(\ )}$$

$$\underbrace{\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}}_{2^n}<\underbrace{\dfrac{1}{2^n}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}_{2^n}=\dfrac{2^n}{2^n}=1$$

Vậy $B<1+2020=2021$.

Ca 2

Câu 3. Chứng minh rằng với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.2+2.5+3.8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$.

HD:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1.2=2$, vế phải bằng $1^2(1+1)=2$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n, giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$

Tức là: $S_k=1.2+2.5+3.8+\ldots+k(3k-1)=k^2(k+1)$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$S_{k+1}=1.2+2.5+3.8+\ldots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2)$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1}=S_k+(k+1)(3k+2)$

$=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$

$=(k+1)(k^2+3k+2)$

$=(k+1)(k+2)(k+3)$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 7. Chứng minh rằng với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

HD:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1^1=1$, vế phải bằng $\dfrac{1.2.3}{6}=1$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n, giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$

Tức là: $S_k=1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$S_{k+1}=1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1}=S_k+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$=\dfrac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 11. Chứng minh rằng: $2^{2n+1}+1$ chia hết cho 3 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

Đặt $B_n=2^{2n+1}+1$

* Với $n=1$, ta có $B_1=2^2-1=3\ \vdots\ 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq 1$, suy ra $B_k=2^{2k+1}+1\ \vdots\ 3$

* Với $n=k+1$, xét $B_{k+1}=2^{2(k+1)+1}+1=2^{2k+1+2}+1$

$=2^{2n+1}.2^2+1=2^{2n+1}.(3+1)+1$

$=\underbrace{3.2^{2k+1}}_{\vdots 3}+\underbrace{2^{2k+1}+1}_{\vdots 3}$

$\Rightarrow B_{k+1}\ \vdots\ 3$

Vậy $2^{2n+1}+1$ chia hết cho 3 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 14. Chứng minh rằng: $16^n-15n-1$ chia hết cho 225 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

Đặt $F_n=16^n-15n-1$

* Với $n=1$, ta có $F_1=16^1-15.1-1=0 \vdots 225$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq 1$, suy ra $F_k=16^k-15k-1 \vdots 225$

* Với $n=k+1$, xét $F_{k+1}=16^{k+1}-15(k+1)-1$

$=16.16^k-15k-16$

$=16^k-15k-1-15\left(16^k-1\right)$

$=F_k-15\left(16^k-1\right)$

Ta có : $16^k-1 \vdots 15 \Rightarrow 15\left(16^k-1\right) \vdots 225$

$\Rightarrow F_{k+1} \vdots 225$

Vậy $16^n-15n-1$ chia hết cho 225 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.