

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
CÂU ĐIỂM 10 TRONG ĐỀ THI HỌC KÌ I
Tài liệu lớp học Zoom 7M1 - 18h00 - 21h15 - Tối thứ 3

Họ và tên: Ngày học:

Dạng 1. Dãy tỉ số bằng nhau – Tỉ lệ thức

Câu 1. Cho dãy tỉ số

$$\frac{2016a+b+c+d}{a} = \frac{a+2016b+c+d}{b} = \frac{a+b+2016c+d}{c} = \frac{a+b+c+2016d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Câu 2.

a) Cho các số x, y, z tỉ lệ với các số 5; 4; 3. Tính giá trị của $P = \frac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$

b) Cho $a+b+c=2015$; $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Câu 3. Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ ($a, b, c, x, y, z \neq 0$).

Chứng minh rằng $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Câu 4. Cho tỉ lệ thức $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$. Chứng minh rằng: $c=0$ hoặc $b=0$.

Câu 5. Cho $a, b, c, x, y, z \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{x}{a-2b+c} = \frac{y}{2a-b-c} = \frac{z}{4a+4b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{z-y-2x} = \frac{c}{4x-4y+z}$

(Lương Thế Vinh)

Câu 6. Cho $a, b, c, d \neq 0$ và $b^2 = ac, c^2 = bd$ và $b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

(Nguyễn Trường Tô)

Câu 7. Cho các số $a, b, c > 0$ và $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5}$.

Tính giá trị biểu thức $M = 10a + b - 7c + 2017$

(Đan Phượng)

Câu 8. Tìm các số thực a, b, c biết: $\frac{3a-2b}{4} = \frac{2c-4a}{3} = \frac{4b-3c}{2}$ và $|a| - |b| - |c| = -10$

(Thái Bình)

Câu 9. Tìm các số x, y, z biết: $\frac{2x-4y}{3} = \frac{4z-3x}{2} = \frac{3y-2z}{4}$; $2x - y + z = 27$

(Thanh Hóa)

Câu 10. Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính giá trị

$$\text{biểu thức } P = \frac{3a+3b+2019c}{a+b-2020c}$$

(Thanh Hóa)

Câu 11. Cho các số thực a, b, c, d, e thỏa mãn: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$.

Chứng minh rằng: $\left(\frac{2019b+2020c-2021d}{2019c+2020d-2021e} \right)^3 = \frac{a^2}{bc}$.

Câu 12. Cho $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{c+a}$. Tính tổng: $S = \frac{a+b}{2c} + \frac{b+c}{3a} + \frac{c+a}{4b}$ (với $abc \neq 0$ và các mẫu đều khác 0).

Câu 13. Cho $\frac{x}{2015} = \frac{y}{2016} = \frac{z}{2017}$. Chứng minh $(x-z)^3 = -8(x-y)^2(z-y)$

Dạng 2. Dãy phân số theo quy luật

Câu 14. $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh $A < \frac{1}{50}$

Câu 15. Cho $A = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2009} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2010}$.

Chứng tỏ A không phải là số nguyên.

(Thạch Thất)

Câu 16.

a) Tính: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{19.21}$

b) Chứng minh: $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{1}{2}$

(Hải Phòng)

Câu 17. Cho $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2017 \cdot 2020}\right)$. Chứng minh: $A < 3$

Câu 18. Tính $E = \frac{3}{(1 \times 2)^2} + \frac{5}{(2 \times 3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$

Câu 19. Tính $B = \frac{1}{10.9} + \frac{1}{18.13} + \frac{1}{26.17} + \dots + \frac{1}{802.405}$

Câu 20. Cho $D = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2}$. Chứng minh $D < 1$.

Câu 21. a. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $E = \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$

b. Chứng minh rằng $F = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Câu 22.

a. Chứng minh rằng $G = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < 4$

b. Chứng minh rằng $H = \frac{2!}{3!} + \frac{2!}{4!} + \frac{2!}{5!} + \dots + \frac{2!}{n!} < 1$

Câu 23. Tính tổng của dãy số gồm 2007 số, biết số hạng thứ n được cho bởi công thức

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n!}$$

Dạng 3. Bài toán về số nguyên, số hữu tỉ

Câu 24. Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ thỏa mãn $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{2015}} = 1008$.

Chứng minh rằng có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

Câu 25. Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $A = \frac{x^4 + y^4}{15}$ cũng là số nguyên dương.

Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 3 và 5. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Câu 26. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho: $21xy - 35x + 18y - 43 = 0$

Câu 27. Cho các số a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Rút gọn biểu thức:

$$P = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$$

Câu 28. Cho các số dương a, b, c và $A = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.

Chứng tỏ A không phải là số nguyên.

(Nam Định)

Câu 29. Tìm số nguyên x để $A = \frac{3x^2 - 6x + 1}{x - 2} \in \mathbb{Z}$

(Ngô Sỹ Liên)

Dạng 4. Bài toán GTNN của biểu thức chứa dấu GTĐ

Câu 30. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2021|$

Câu 31. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x-1| + |x-2| + |2x-5|$

Câu 32. Cho $|a-c| < 3, |b-c| < 2$.

a) Chứng minh $|a-b| < 5$

b) Chứng minh $|3a-2b-c| < 13$

Câu 33. Chứng minh rằng: $|x| + |y| \geq \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right|$

Câu 34. Chứng minh với mọi x, y, z ta có $|x+y| + |y+z| \geq |x-z|$

Câu 35. Cho các số thực a, b, c, x thỏa mãn $ax^2 + bx + c = 0$ và $|a| = |b| + |c|$ ($a \neq 0$).

Chứng minh rằng $|x| < 2$