BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....**Ngày học:** ....

CA 1

Câu 9: Chứng minh rằng $2^{2022}-4$ chia hết cho 31.

HD:

$2^5=32\equiv 1\pmod{31}\Rightarrow 2^{2020}=\left(2^5\right)^{404}\equiv 1\pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2022}=2^{2020}.2^2\equiv 2^2\pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2022}\equiv 4\pmod{31}$

Hay $2^{2022}-4$ chia hết cho 31. (đpcm)

Câu 12: Chứng minh rằng $5^{2n-1}.2^{n+1}+2^{2n-1}.3^{n+1}\,\vdots\,38\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

HD:

$A=5^{2n-1}.2^{n+1}+2^{2n-1}.3^{n+1}\,\vdots\,2\left(1\right)$

Mặt khác: $A=5^{2n-1}.2^{n+1}+2^{2n-1}.3^{n+1}=2^n\left(2.5^{2n-1}+2^{2n-10}.3^{n+1}\right)=2^n\left(25^{n-1}.10+6^{n-1}.9\right)$

Do $25\equiv 6\pmod{19}\Rightarrow A\equiv 2^n\left(6^{n-1}.10+6^{n-1}.9\right)\equiv 2^n.6^{n-1}.19\equiv 0\pmod{19}$

Hay $A\,\vdots\,19\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)\left(2\right)$ và $\left(2,19\right)=1$, ta có được $A\,\vdots\,38$ (đpcm).

Câu 16: Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1002}

HD:

Ta có: $3^{20}\equiv 1\pmod{100}\Rightarrow 3^{1000}=\left(3^{20}\right)^{50}\equiv 1\pmod{100}$

$\Rightarrow 3^{1002}\equiv 3^2.3^{1000}\equiv 9\pmod{100}$, nên hai chữ số tận cùng của 3^{1002} là 09.

CA 2

Câu 8. Với $a,b,c>0$, chứng minh: $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)$.

HD:

a) $a^2+\dfrac{b^2}{4}\ge ab\Leftrightarrow 4a^2+b^2\ge 4ab\Leftrightarrow 4a^2-4a+b^2\ge 0\ \Leftrightarrow\left(2a-b\right)^2\ge 0$ (Bđt này luôn đúng)

Vậy $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a = b)

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1\ )>2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ (dấu bằng xảy ra khi a = b = 1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ )\ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow \left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+\left(a^2-4ad+4d^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2\ge 0$

Câu 12. Chứng minh rằng: $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$

HD:

$(a+b)\left(a^4+b^4\right)\ge\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)\ge 0$

Ta có: $(a+b)\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)=a^5+b^5+ab^4+a^4b-\left(a^5+b^5+a^2b^3+b^2a^3\right)$

$=ab^4+a^4b-a^2b^3-a^3b^2$

$=\left(ab^4-a^2b^3\right)+\left(a^4b-a^3b^2\right)$

$=ab^3(b-a)+a^3b(a-b)$

$=ab\left(a^2-b^2\right)(a-b)$

$=ab(a+b)(a-b)^2\ge 0$ với mọi $a,b>0$