BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
ĐỒNG DƯ THỨC
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

I – LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa về đồng dư:

Cho a,b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta nói, a đồng dư với b theo modul n và ký hiệu $a \equiv b \pmod{n}$ nếu a với b có cùng số dư khi chia cho n.

Như vậy $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a-b \,\vdots\, n$.

2. Tính chất:

2.1 – Quan hệ tương đương:

$a \equiv a \pmod{n}$

$a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

2.2. $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n} \\ ac \equiv bd \pmod{n} \end{array}\right.$

2.3. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}, \forall k \geq 1$

2.4. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{n}, k > 0$

2.5. $(a+b)^n \equiv b^n \pmod{a}, a > 0$

2.6. Nếu d là ước chung của a,b và m thì $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}\left(\bmod \frac{m}{d}\right)$.

<u>Hệ quả:</u> Nếu $a \equiv b \pmod{m}, d$ là ước chung của a và b và $(d,m)=1$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

2.7. Nếu $a \equiv b \pmod{m_i} (i = 1,2,...,n)$ và $m = [m_1, m_2, ..., m_n]$ thì $a \equiv b \pmod{m}$.

<u>Hệ quả:</u>

+ Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $d > 0$ là ước của m thì $a \equiv b \pmod{d}$.

+ Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung của a và m thì d là ước của b.

+ Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $(a,m) = (b,m)$.

3. Định lý:

3.1. Định lý Euler và phi hàm Euler:

+ Phi hàm Euler $\varphi(n)$ đếm số nguyên giữa 1 và n thỏa mãn nguyên tố cùng nhau với n.

Ví dụ: $\varphi(10) = 4$ vì giữa 1 và 10 có 4 số nguyên tố cùng nhau với 10: 1;3;7;9.

$\varphi(n)$ được tính như sau:

Với p là số nguyên tố, $\varphi(p) = p-1$.

Với $k \in \mathbb{Z}^+, \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

Với $n = a.b$ với $(a,b) = 1$ thì $\varphi(n) = \varphi(a).\varphi(b)$.

+ Định lý Euler: Với mọi số nguyên dương n nguyên tố cùng nhau với số nguyên a thì:

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$

Hệ quả:

Nếu p là số nguyên tố và số nguyên a bất kỳ không chia hết cho p, $\varphi(p) = p-1$ nên ta được $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Tổng quát hơn, ta có định lý Fermat nhỏ: Nếu p là một số nguyên tố và số nguyên a bất kỳ, ta có: $a^p \equiv a \pmod p$.

3.2. Định lý Wilson: Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv (-1) \pmod p$

II – BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm số dư trong phép chia có dư, chứng minh sự chia hết

Câu 1: Tìm số dư của phép chia 3^{2021} cho 13.

Câu 2: Tìm số dư của phép chia $2019^{2020} + 2020^{2021} + 2021^{2022} + 2022$ cho 5.

Câu 3: Tìm số dư của phép chia $2^{100} + 41^{60}$ cho 7.

Câu 4: Tìm số dư của phép chia $1^5 + 3^5 + 5^5 + ... + 97^5 + 99^5$ cho 4.

Câu 5: Tìm số dư của phép chia $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

Câu 6: Tìm số dư của phép chia $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Câu 7: Chứng minh dấu hiệu chia hết cho 3, 9.

Câu 8: Chứng minh dấu hiệu chia hết cho 11.

Câu 9: Chứng minh rằng $2^{2022} - 4$ chia hết cho 31.

Câu 10: Chứng minh rằng $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2021}$ chia hết cho 3.

Câu 11: Chứng minh rằng $5555^{2222} + 2222^{5555} \vdots 7$

Câu 12: Chứng minh rằng $5^{2n-1}.2^{n+1} + 2^{2n-1}.3^{n+1} \vdots 38 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Dạng 2: Tìm chữ số tận cùng

Câu 13: Tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{9^9}}$

Câu 14: Tìm chữ số tận cùng của số 2^{2021}

Câu 15: Tìm hai chữ số tận cùng của số 2^{2020}

Câu 16: Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1002}

Câu 17: Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}

Dạng 3: Sử dụng các định lý

Câu 18: Tìm số nguyên tố p để $2^p+1 \vdots p$.

Câu 19: Cho $B=(100!)^{13}+2021^{2022}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Câu 20: Cho $A=2^{2^{10n+1}}+19$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Câu 21: Chứng minh rằng $7^{4k}+10^{4k}+17^{4k}+31^{4k}$ không chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên k.

Câu 22: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n-n(n\in\mathbb{N})$ chia hết cho p.

Câu 23: Cho a,b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m,n sao cho a^m+b^n-1 chia hết cho ab.

Câu 24: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và số tự nhiên $n=\dfrac{2^{2p}-1}{3}$.

Chứng minh rằng $2^{n-1}-1$ chia hết cho n.

Dạng 4: Các bài toán tổng hợp:

Câu 25: Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $A=3^n+63$ chia hết cho 72.

Câu 26: Tìm tất cả các số nguyên tố p để số p^2+20 là một số nguyên tố.

Câu 27:

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có số dư là 7.

b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x,y,z thỏa mãn $x^2+4y^2+9z^2=2023$

Câu 28: (Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN – ĐHKHTN – ĐHQGHN 2011- 2012)

Chứng minh rằng không tồn tại bộ ba số nguyên (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức $x^4+y^4=7z^4+5$.

Câu 29: (Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015-2016)

Chứng minh rằng số $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Câu 30: Cho a,b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a+20$ và $b+13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư của phép chia $A=4^a+9^b+a+b$ cho 21.

Câu 31. Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$. Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 27 .

Câu 32. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c$ chia hết cho 6 thì $(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$ chia hết cho 6.

Câu 33. Giả sử $2^{1000}=a_1+a_2+...+a_{1000}$ với $a_1,a_2,...,a_{1000}$ là các số nguyên dương. Tìm số dư khi chia

$A = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{1000}^3$ cho 6.

Câu 34. Chứng minh rằng $11^{11^{11}} - 11 \vdots 1320$

Câu 35. Chứng minh rằng $7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^9} \vdots 100$

Câu 36. Chứng minh rằng $A = 2^{2n+3}.3^{n+3} + 2^{n+3}.5^{2n+3} \vdots 38$

Câu 37. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $25^n + 5^n + 1 \vdots 31 \leftrightarrow n \not\vdots 3$

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

CHỦ ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Câu 1: Chứng minh rằng: $1+2a^4 \ge a^2+2a^3$ với mọi a.

Câu 2. Chứng minh rằng: $4a^4+5a^2 \ge 8a^3+2a-1$ với mọi a.

Câu 3. Chứng minh rằng: $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 \ge 0$ với mọi a.

Câu 4. Với mọi số x, y . Chứng minh rằng: $x^2+4y^2+10 \ge 6x+4y$.

Câu 5. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+9 \ge ab+3a+3b$ với mọi a,b.

Câu 6. Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2+\frac{b^2}{4} \ge ab$ b) $a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$ c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$

Câu 7. Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b} \ge a^2+ab-b^2$.

Câu 8. Với $a,b,c>0$, chứng minh: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$.

Câu 9. Chứng minh: $(1+a^2)(1+b^2) \ge (1+ab)^2$ với mọi a,b.

Câu 10. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2+4 \ge 2(a+b+c+d)$ với mọi a,b,c,d .

Câu 11. Cho các số a,b dương. Chứng minh rằng: $(a+b)(a^4+b^4) \ge (a^2+b^2)(a^3+b^3)$.

Câu 12. Chứng minh rằng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \ge (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

Câu 13. Cho các số $0<a<b<c$. Chứng minh rằng: $b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{b}(a+c) \le (a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$

Câu 14. Cho $-1<ab \le 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \le \frac{2}{1+ab}$.

Giáo viên: Thầy Bùi Minh Mẫn