BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Bài 13. Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

HD:

Do p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5 nên p. q là các số nguyên tố lẻ. suy ra các số khi chia p, q cho 4 chỉ có thể là 1 hoặc 3 . Từ đây, dễ thấy p^4,q^4 cùng có số dư là 1 khi chia cho 4. Như vậy, ta có $p^4+2019q^4=\left(p^4-1\right)+2019\left(q^4-1\right)+2020$ chia hết cho 4 .

Mặt khác, cũng do p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5 nên p, q không chia hết cho 5, suy ra các số dư khi chia p, q cho 5 chỉ có thể là 1, 2, 3, 4. Từ đó, các số dư của p^2,q^2 khi chia 5 chỉ có thể là 1, 4 . Suy ra số dư của p^4,q^4 khi chia 5 chỉ có thể là 1 . Như thế, ta có $p^4+2019q^4=\left(p^4-1\right)+2019\left(q^4-1\right)+2020$ chia hết cho 5 .

Từ (1) và (2), với chú ý $(4,5)=1$, ta suy ra $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.

Bài 14. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3;b^5;2+a^2+b^4$ đều là bội của c. Tìm c biết c là số lẻ.

HD:

Gọi d là ước nguyên tố của c thì $a^3;b^5$ chia hết cho d nên a và b chia hết cho d, do đó 2 chia hết cho d C lẻ nên d lẻ, suy ra vô lý. Vậy c không có ước nguyên tố do đó c = 1.

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3+\frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

HD:

Do p là số nguyên tố nên khi p là số chẵn thì $p=2$, còn nếu p là số lẻ thì p có các dạng $p=4k+1$ hoặc $p=4k+3$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$ suy ra $p^3+\frac{p-1}{2}$ không nguyên

- Trường hợp 2: Nếu $p=4k+1$, khi đó ta được $p^3+\frac{p-1}{2}=(4k+1)^3+2k$ là số lẻ nên $p^3+\frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

- Trường hợp 3: Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3+\frac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Khi đó ta có $p^3+\frac{p-1}{2}=x(x+1)\Leftrightarrow 2p\left(2p^2+1\right)=(2x+1)^2+1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2+1 \vdots p$ vô lí vì $p=4k+3$.

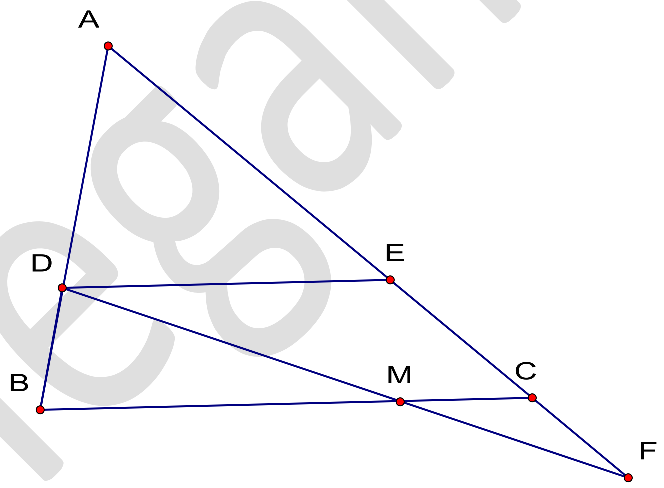
HÌNH HỌC

Câu 4. Cho tam giác ABC. Từ điểm D trên cạnh AB vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$.

b) Trên tia đối tia CA, lấy điểm F sao cho $CF=BD$. Đoạn DF cắt BC tại M. Chứng minh $\frac{MF}{MD}=\frac{AB}{AC}$

HD:

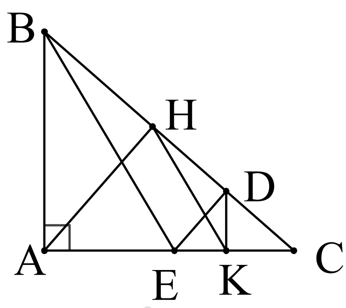


a) Vì $DE//BC$ nên theo định lý Thales ta có $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$. Do đó suy ra $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$

b) Xét tam giác FED có $CM//DE$ nên $\frac{MF}{MD}=\frac{CF}{CE}=\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$ (vì $CF=BD$ và theo ý (a))

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, điểm D nằm giữa H và C. Kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc AC), kẻ DK vuông góc với AC (K thuộc AC). Chứng minh rằng BE song song với HK.

HD:



Theo định lí Ta-lét ta có:

DK // AB (vì cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{CK}{AC} \Rightarrow CD.AC = CB.CK$. (1)

DE // AH (vì cùng vuông góc với BC)

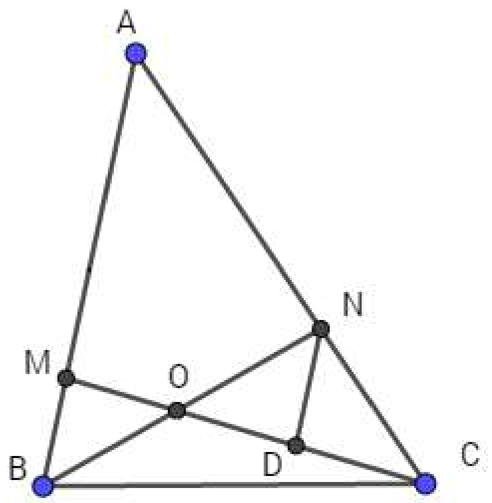
$\Rightarrow \frac{CD}{CH} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow CD.AC = EC.CH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CB.CK = EC.CH \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{EC}$.

Xét tam giác BEC có: $\frac{CH}{CB} = \frac{CK}{EC}$, theo định lí Ta-lét đảo suy ra HK // BE (đpcm).

Câu 9. Cho tam giác ABC , AB = 4, AC = 4,5. Trên AB và AC lấy theo thứ tự các điểm M,N sao cho AM = AN = 3.Gọi O là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 3$.

HD:



Vẽ ND//AB, ta có :

$\frac{DN}{MA} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{3}$ (1)

Lại có : $\frac{BM}{AM} = \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MB=ND, do đó tứ giác BMND là hình bình hành nên $\frac{OB}{ON} = 1$

Do $ND//AM$, ta có $\frac{MD}{CD}=\frac{AN}{CN}=\frac{3}{1,5}=2\Rightarrow MD=2CD$

$$\Rightarrow OM=OD=OC$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OM}=2$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{ON}+\frac{OC}{OM}=3$$