BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Bài 7. Tìm các số nguyên dương n để $A=n^4+n^3+n^2$ là số chính phương

HD:

Ta có $A=n^4+n^3+n^2=n^2\left(n^2+n+1\right)$. Ta xét các trường hợp sau.

(1) Nếu $A=0$, ta được $n=0$.

(2) Nếu $A\neq 0$ thì n^2+n+1 là số chính phương. Đặt $n^2+n+1=k^2$, với $k\in\mathbb{N}$. Ta có

$$4\left(n^2+n+1\right)=4k^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2+3 \quad =(2k)^2 \Leftrightarrow (2k-2n-1)(2k+2n+1)=3.$$

Lập bảng giá trị:

$2k-2n-1$	$2k+2n+1$	n
-3	-1	0
-1	-3	-1
1	3	0
3	1	-1

Giải phương trình ước số trên, ta được $n=-1$ và $n=0$, mà $A\neq 0$ nên ta chỉ có $n=-1$.
Tóm lại, tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài của n là $n=-1$ và $n=0$.

Bài 9. Tìm các số nguyên tố p và q sao cho p^2-q^2-1 là số chính phương.

HD:

Ta xét các trường hợp sau.

(1) Với $p>q\geq 3$, do p và q cùng lẻ, nên $p^2\equiv q^2\equiv 1(\bmod 4)$. Ta có

$$p^2-q^2-1\equiv 1-1-1=-1\equiv 3(\bmod 4).$$

Trong trường hợp này, p^2-q^2-1 không chính phương.

(2) Với $q=2$, ta đặt $k^2=p^2-q^2-1$. Ta lần lượt suy ra

$$k^2=p^2-5 \Rightarrow 5=(p-k)(p+k) \Rightarrow \begin{cases} p+k=5 \\ p-k=1 \end{cases} \Rightarrow p=3 \Rightarrow q=2$$

Kiểm tra trực tiếp, ta thấy $(p,q)=(3,2)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài.

Bài 11. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2+n+8$ không phải là số chính phương.

HD:

Từ giả thiết $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3, ta có $n\equiv 1(\bmod 3)$.

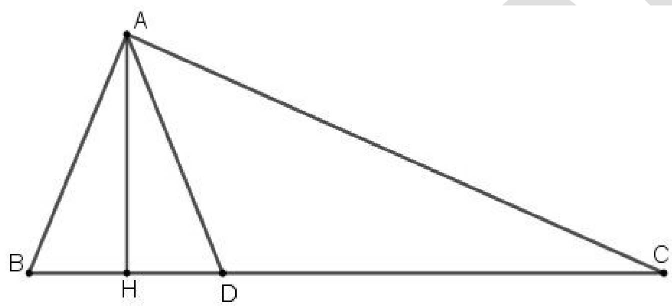
Như vậy $2n^2+n+8\equiv 2+1+8\equiv 2(\bmod 3)$.

không có số chính phương nào chia 3 dư 2 và bài toán được chứng minh.

HÌNH HỌC

Câu 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn, đường phân giác AD. Biết $AD=AB=\sqrt{5}$, $BD=2$. Tính độ dài BC.

HD:



Kẻ AH là đường cao của tam giác ABC.

Ta có ΔABD cân tại A, có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow BH=HD=\dfrac{BD}{2}=1$.

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{5-1}=2$.

Đặt $DC=x$.

Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow\dfrac{2}{x}=\dfrac{\sqrt{5}}{AC}\Rightarrow AC=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$.

ΔAHC vuông tại H nên ta có :

$$AH^2+HC^2=AC^2\Leftrightarrow 4+(x+1)^2=\left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2-8x-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-2\ (L)\end{array}\right.$$

Vậy $DC=10\Rightarrow BC=12$.

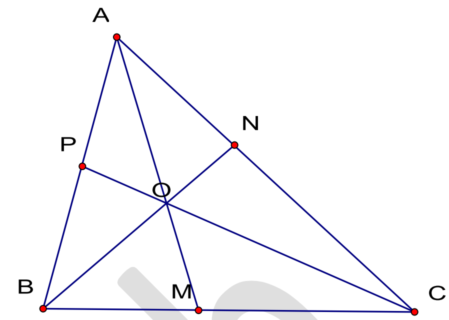
Câu 8. Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN, CP cắt nhau tại O. Ba cạnh AB, BC, CA tỉ lệ với 4, 7, 5.

a) Tính MC, biết $BC=18cm$.

b) Tính AC, biết $NC-NA=3cm$.

c) Tính tỉ số $\frac{OP}{OC}$.

HD:



a) Theo tính chất đường phân giác

$\frac{MC}{MB}=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{4}\Rightarrow \frac{MC}{MB+MC}=\frac{5}{9}$

$\Rightarrow \frac{MC}{BC}=\frac{5}{9}\Rightarrow MC=\frac{5}{9}.18=10cm$

b) Theo tính chất đường phân giác

$\frac{NC}{NA}=\frac{BC}{AB}=\frac{7}{4}\Rightarrow \frac{NC-NA}{NA}=\frac{7-4}{4}=\frac{3}{4}$

Mà $NC-NA=3$, do đó $NA=4cm$, suy ra $NC=7cm$. Vậy $AC=11cm$.

c) Theo tính chất đường phân giác ta có:

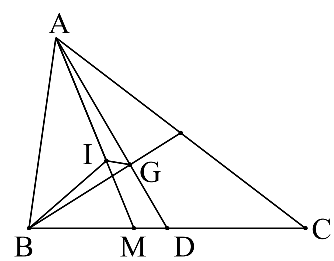
$\frac{BP}{BC}=\frac{OP}{OC}=\frac{AP}{AC}=\frac{BP+AP}{BC+AC}=\frac{AB}{BC+AC}=\frac{4}{7+5}=\frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có AB = 12cm, AC = 18cm, BC = 15cm. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác, G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng IG // BC. b) Tính độ dài IG.

HD:

a) Kéo dài AI cắt BC tại M, kéo dài AG cắt BC tại D.



Vì AM là tia phân giác của góc BAC nên ta có:

$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\Rightarrow BM=\frac{2}{3}MC$.

$BM+MC=BC\Rightarrow \frac{2}{3}MC+MC=15\Leftrightarrow \frac{5}{3}MC=15\Leftrightarrow MC=9\,(cm)$.

$\Rightarrow BM=\frac{2}{3}.9=6\,(cm)$.

Xét tam giác ABM có BI là tia phân giác của góc ABM

$\Rightarrow \frac{IA}{IM}=\frac{AB}{BM}=\frac{12}{6}=2$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $AG=2GD\Leftrightarrow \frac{AG}{GD}=2$.

Khi đó: $\frac{IA}{IM}=\frac{AG}{GD}=2$, theo định lí Ta-lét đảo suy ra IG // MD, tức là IG // BC (đpcm).

b) Xét tam giác AMD có IG // MD, theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:

$\frac{IG}{MD}=\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}\Rightarrow IG=\frac{2}{3}MD$.

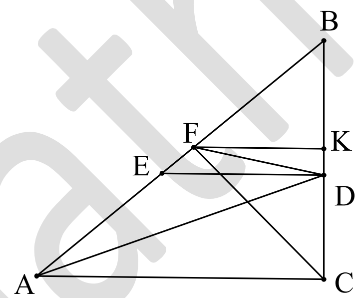
Ta có: $MD=BD-BM=\frac{1}{2}BC-BM=\frac{1}{2}.15-6=1,5\,(cm)$.

$\Rightarrow IG=\frac{2}{3}.1,5=1\,(cm)$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có $AB>BC$, các phân giác trong AD, CF. Chứng minh rằng $AF>FD>DC$.

HD:

Kẻ DE // AC (E thuộc AB), FK // AC (K thuộc BC).



Vì DE // AC nên $\frac{AE}{BE}=\frac{CD}{BD}$. (1)

Xét tam giác ABC có AD là tia phân giác nên $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{AE}{AE+BE}=\frac{AC}{AC+AB}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AC+AB}$.

Xét tam giác ABC có CF là tia phân giác nên $\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{AF}{AF+BF}=\frac{AC}{AC+BC}\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AC+BC}$

Vì $AB>BC$ nên $AB+AC>BC+AC$ $\Rightarrow\frac{AC}{AC+AB}<\frac{AC}{BC+AC}$

$\Rightarrow\frac{AE}{AB}<\frac{AF}{AB}\Rightarrow AE<AF$ $\Rightarrow$ Điểm E nằm giữa A và F $\Rightarrow\widehat{ADE}<\widehat{ADF}$

Mà $\widehat{ADE}=\widehat{EAD}(=\widehat{DAC})$ nên $\widehat{EAD}<\widehat{ADF}$ $\Rightarrow AF>FD$. (3)

Chứng minh tương tự ta có D nằm giữa K và C.

$\Rightarrow\widehat{DCF}=\widehat{KFC}>\widehat{CFD}\Rightarrow FD>CD$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra AF > FD > CD (đpcm).