BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Bài 14. Tìm 2 số nguyên tố p, q sao cho $p^{q+1}+q^{p+1}$ là số chính phương.

HD:

Ta xét hai trường hợp sau.

(1) Trường hợp 1. Xét $p=q$, khi đó $p^{q+1}+q^{p+1}=2p^{p+1}$. Ta có các khả năng sau.

* Nếu $p=2$ thì $2p^{p+1}=16$ là số chính phương nên $(p,q)=(2,2)$ là một nghiệm

* Nếu $p\neq 2$ thì p^{p+1} là số chính phương nên $2p^{p+1}$ không là số chính phương.

(2) Trường hợp 2. Xét $p\neq q$, không mất tính tổng quát ta giả sử $p>q$.

Nếu p, q cùng lẻ thì p^{p+1} và q^{p+1} là hai số chính phương lẻ nên

$p^{q+1}+q^{p+1}\equiv 2 \pmod 4$, điều này mâu thuẫn, do đó với $p>q$ thì $q=2$.

Đặt $p^3+2^{p+1}=x^2$ và $p+1=2k$ với $x,k\in\mathbb{Z}^+$ ta được $\left(x-2^k\right)\left(x+2^k\right)=p^3$.

Dễ dàng chứng minh $\left(x-2^k,x+2^k\right)=1$, với x lẻ nên $x-2^k=1$ và $x+2^k=p^3$.

Trừ hai phương trình trên và biến đổi ta có

$2^{k+1}+1=p^3\Leftrightarrow (p-1)\left(p^2+p+1\right)=2^{k+1}$.

Do p^2+p+1 lẻ nên $p^2+p+1=1$ điều này mâu thuẫn do p nguyên tố.

Vậy cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn duy nhất là (2, 2).

Bài 17. Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.

HD:

$$4x^2y^2-7x+7y=(2xy-1)^2+4xy-7x+7y-1>(2xy-1)^2$$
$$4x^2y^2-7x+7y=(2xy+1)^2-4xy-7x+7y-1<(2xy+1)^2$$

Đặt $4x^2y^2-7x+7y=$ A. Nên $(2xy-1)^2<A<(2xy+1)^2$

Suy ra $-4xy+1<-7x+7y<4xy+1$

Nếu $x>y\geq 2$ thì $-7x+7y<0<4xy+1$

$-4xy+1\leq -8x+1<-7x+7y\Leftrightarrow A=4x^2y^2\Leftrightarrow x=y$

Tương tự $y>x\geq 2$ vậy $x=y$

Bài 20. Tìm các số nguyên dương n để $n^4+4n^3-3n^2-n+3$ là số chính phương.

HD:

Nhận xét. Ta không thể phân tích $n^4+4n^3-3n^2-n+3$ thành các đa thức nhân tử hệ số nguyên. Do đó, trong bài toán này, ta nghĩ đến việc chọn các tham số a, b, c, d để chắc chắn rằng

$$\left(n^2+an+b\right)^2 \le n^4+4n^3-11n^2-n+11 \le \left(n^2+cn+d\right)^2 \ (*)$$

Đối với những bài toán kẹp bậc bốn như trên, ta nên cố gắng kẹp sao cho làm mất hệ số bậc ba. Theo đó, do hệ số bậc ba trong đa thức ở các vế của (*) lần lượt là 2a, 4, 2c nên ta chọn $a=c=2$.

Đặt biểu thức đã cho là A. Tiếp đó, ta xét các hiệu sau

$$A-\left(n^2+2n+b\right)^2=(-7-2b)n^2+(-4b-1)n+\left(-b^2+3\right),$$

$$\left(n^2+2n+d\right)^2-A=(7+2d)n^2+(4d+1)n+\left(d^2-3\right).$$

Hệ số bậc hai trong các hiệu trên phải dương. Các hệ số bậc hai cũng phải dương để đánh giá được tốt, nên để phần kẹp của chúng ta được "sát" nhất, ta nên chọn $b=-4$ và $d=0$.

Đặt $A=n^4+4n^3-3n^2-n+3$. Ta nhận xét được rằng là

$$A-\left(n^2+2n-4\right)^2=n^2+15n-13\ge 1+15-13>0$$

$$\left(n^2+2n\right)^2-A=7n^2+n-3\ge 7+1-3>0.$$

Các hiệu trên đều dương, chứng tỏ $\left(n^2+2n-4\right)^2<A<\left(n^2+2n\right)^2$.

Do A là số chính phương, ta xét các trường hợp sau.

(1) Với $A=\left(n^2+2n-3\right)^2$, ta có

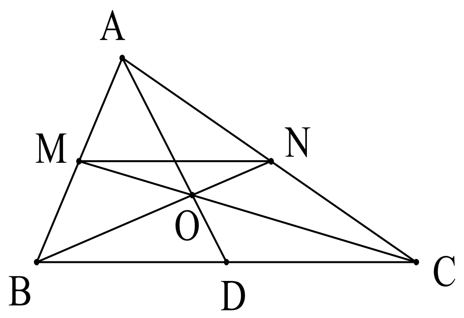
$$n^4+4n^3-3n^2-n+3=n^4+4n^3-2n^2-12n+9 \Leftrightarrow n^2-11n-6=0.$$

Phương trình trên vô nghiệm nguyên do nó có $\Delta=11^2+4.6=145$ không chính phương.

HÌNH HỌC

Câu 2. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AD. Tia CO cắt AB tại M, tia BO cắt AC tại N. Chứng minh rằng $S_{BOM} = S_{CON}$.

HD:



Vì AD, BN, CM đồng quy tại O nên theo định lí Cesva ta có: $\frac{DB}{DC}.\frac{NC}{NA}.\frac{MA}{MB} = 1$.

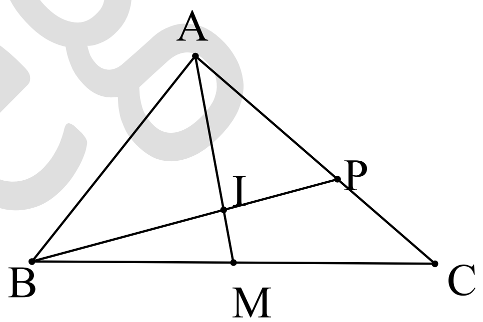
Mà DB = DC (Do D là trung điểm của BC)

$\Rightarrow \frac{NC}{NA}.\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB}$ $\Rightarrow$ MN // BC (theo định lí Ta-lét đảo).

$\Rightarrow S_{MBC} = S_{NBC} \Leftrightarrow S_{MBO} + S_{BOC} = S_{NOC} + S_{BOC} \Leftrightarrow S_{MBO} = S_{NOC}$ (đpcm).

Câu 3. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên AM lấy điểm I sao cho $AI = 4MI$. Đường thẳng BI cắt AC tại P. Chứng minh rằng PA = 2PC.

HD:



Xét tam giác AMC với 3 điểm B, I, P thẳng hàng. Theo định lí Menelaus ta có:

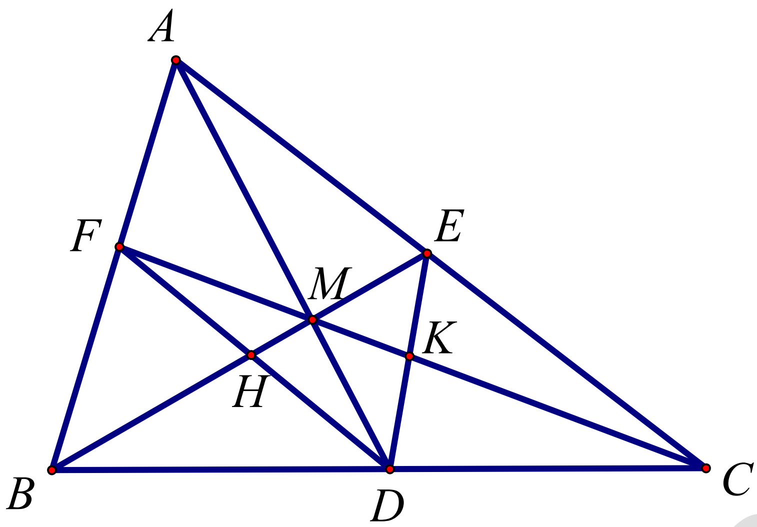
$$\frac{PA}{PC}.\frac{BC}{BM}.\frac{IM}{IA} = 1.$$

Mà $AI = 4MI \Leftrightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{1}{4}; BC = 2BM \Leftrightarrow \frac{BC}{BM} = 2$

$\Rightarrow \frac{PA}{PC}.2.\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow PA = 2PC$ (đpcm).

Câu 7. Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC,CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM, gọi H là giao điểm của DF và BM. Chứng minh: AD, BK, CH đồng quy.

HD:



Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle AMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và $\triangle BMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có :

$$\frac{KM}{KC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{DA}{DM} = 1, \quad \frac{BH}{HM} \times \frac{DM}{DA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

Suy ra $\frac{KM}{KC} = \frac{EA}{EC} \times \frac{DM}{DA}, \quad \frac{BH}{HM} = \frac{FB}{FA} \times \frac{DA}{DM}$ (1)

Áp dụng định lí Ceva cho $\triangle ABC$ với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF :

$$\frac{CD}{BD} \times \frac{BF}{FA} \times \frac{AE}{EC} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{FA}{BF} \times \frac{EC}{AE} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KM}{KC} \times \frac{BH}{HM} \times \frac{CD}{BD} = 1$.

Vậy theo phần đảo của định lí Ceva BK, CH, MD đồng quy tức AD, DK, CH đồng quy.