

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8**  
**TUYỂN CHỌN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI**  
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 - 14h30 - 17h15 - Chiều chủ nhật

Họ và tên: ..... Ngày học: .....

**Bài 1.** Cho các số  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ .

Tính giá trị của biểu thức :  $P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$

(Thành phố HCM 2022 – 2023)

**Bài 2.**

a) Cho các số nguyên  $a, b$  thỏa mãn  $(a^2 - 4ab + b^2) : 3$ . Chứng minh rằng :

$$(a^3 + b^3 + a^2b + 4ab^2) : 3$$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên  $x^2 + xy - 2021x - 2022y - 2023 = 0$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

**Câu 3.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương thỏa  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 3$$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

**Câu 4.**

a) Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $x + y + z = 2; xyz = -1$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ .

Tính giá trị của  $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$

b) Giải phương trình  $x^4 - 5x^2 + 6x - 5 = 0$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

**Bài 5.** Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được 2 số gọi là  $a$  và  $b$  sao cho  $(a^2 - b^2) : 11$

(Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 – 2023)

**Câu 6.** Cho 2 số dương  $a, b$  thỏa mãn điều kiện:  $a + b \leq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b}$$

(Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 – 2023)

**Câu 7.** Cho ba số  $x, y, z$  khác 0 và thỏa mãn: 
$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4. \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức  $P = (x^{2019} + y^{2019})(y^{2019} + z^{2019})(z^{2019} + x^{2019})$

(Nhu Xuân – Thanh Hóa 2022 – 2023)

**Câu 8.** Chứng minh rằng có một số tự nhiên  $N$  gồm toàn chữ số 9 sao cho số  $N$  đó chia hết cho 2019.

(Liên Chiêu – Đà Nẵng 2022 – 2023)

**Câu 9.** Sáu điểm phân biệt thuộc một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là 3cm, 4cm (các điểm này có thể nằm trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong sáu điểm này mà bình phương khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 5.

(Thanh Chương – Nghệ An 2022 – 2023)

**Câu 10.** Cho 5 số nguyên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng luôn lớn hơn tổng hai số còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích năm số nguyên đó.

(Tam Dương – Vĩnh Phúc 2022 – 2023)

**Câu 11.** Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên  $n$  thỏa mãn  $(2014^{2014} + 1)$  chia hết cho  $n^3 + 2012n$

(Chi Linh – Hải Dương 2022 – 2023)

**Câu 12.** Cho  $n$  là một số nguyên dương lẻ. Ta viết các số  $1; 2; 3; \dots; 2n$  lên bảng. Ta thực hiện việc xóa đi hai số bất kỳ trên bảng, chẳng hạn là  $a$  và  $b$  và thay vào đó số  $|a - b|$ . Việc đó được thực hiện đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Hỏi với cách làm như trên thì số 2020 có trên bảng hay không? hãy giải thích

(Nho Quan – Ninh Bình 2022 – 2023)

**Câu 13.** Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng mà 3 đỉnh đó cùng màu hoặc đôi một khác màu

(Diễn Châu – Nghệ An 2022 – 2023)

**Câu 14.** Cho  $a, b, c$  là các số thỏa mãn  $abc = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$S = \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1}$$

(Ba Vì – Hà Nội 2022 – 2023)

**Câu 15.**  $n \geq 2$  và  $p \in P: \begin{cases} p-1: n \\ n^3-1: p \end{cases}$

CMR:  $n+p$  là số chính phương.

**Câu 16.** Nếu  $2n = a^2 + bc$ . CMR:  $n = c^2 + d^2$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ )

**Câu 17.** Cho  $a, b, c \geq 0: a + b + c \geq 3$ .

Tìm Max  $Q = \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b}$

**Câu 18.**  $a + b \geq 1$  và  $a > 0$ . Tìm Min:  $T = \frac{20a^2 + b}{4a} + 4b^2$ .

**Câu 19.** Cho  $a, b, c > 0$ . CMR:  $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c$

**Câu 20.**  $x, y, z > 0: \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{z}{x}}$ . CMR:  $x = y = z$ .

**Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt**

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8**

**Chủ đề: BĐT CHỌN TỪ ĐỀ THI NĂM 22-23**

Tài liệu lớp học Zoom 8M1 - 14h30 - 17h15 - Chiều chủ nhật

Họ và tên: ..... Ngày học: .....

**Câu 1.**

a) Tìm GTNN của biểu thức:  $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

b) Cho  $a, b > 0$  và  $a + b = 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$

**Câu 2.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Tìm GTLN của biểu thức

$$T = \frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c}$$

**Câu 3.**

a) Chứng minh  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$  với  $x, y$  là các số dương

b) Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

**Câu 4.** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . CMR:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

**Câu 5.** Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của tam giác. Chứng minh:

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$$

**Câu 6.** Cho 2 số không âm  $a; b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 \leq a + b$ . Tìm GTLN của biểu thức

$$S = 2019 + \left( \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020}$$

**Câu 7.** Cho  $x, y$  là hai số thực thỏa mãn  $x + y + 4 = 0$ . Tìm GTLN của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$$

**Câu 8.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1}.$$

**Câu 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thỏa mãn  $|a| < 1; |b| < 1; |c| < 1$  và  $ab + bc + ca = 2$

Chứng minh  $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$

**Câu 10.**

a) Chứng minh  $(a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$

b) Với  $a + b + c = 3$ . Tìm GTNN của  $M = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^3}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^3}{c^2 + a^2 + ca}$ .

**Giáo viên: Thầy Bùi Minh Mẫn**