

Toán lớp 8: Nền tảng chuyên
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG – PHÂN GIÁC TRONG, NGOÀI
Tài liệu lớp học Zoom 8A0 - 14h30 - 17h45 - Chiều chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: Ngày học:

Câu 1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AD, đường phân giác BE, giả sử AD cắt BE tại F.

Chứng minh: $\frac{EA}{EC} = \frac{FD}{FA}$.

Câu 2. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q, E lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi M là giao điểm của DE và CQ; gọi I là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $AM = 4 \cdot MI$.

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có 3 đường cao AD, BE, CF và trực tâm H.

- Chứng minh H cách đều 3 cạnh của tam giác DEF.
- Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng AD, BC lần lượt tại M, N. Chứng minh $ME \cdot NF = NE \cdot MF$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ đường cao AH, ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P

- Chứng minh $\widehat{KAC} = \widehat{PBC}$.
- Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh $\Delta BHQ \sim \Delta BPC$.
- Tia AQ cắt BC tại I. Chứng minh $\frac{AH}{BH} - \frac{BC}{BI} = 1$.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD. Trên AB lấy điểm M sao cho $MB < MA$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Trên BC lấy điểm N sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$, AN cắt DC tại E; ON cắt BE tại K. Kẻ $KH \parallel MO$ (H trên đường thẳng BC). Chứng minh

- Tam giác MON vuông cân.
- $MN \parallel BE$.
- CK vuông góc BE.
- $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$

Câu 6. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, đường cao AH, Từ H dựng HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC ($E \in AB; F \in AC$).

- Chứng minh: $AH^2 = AE \cdot AB$.
- Chứng minh: ΔAFE đồng dạng với ΔABC .
- Gọi T là trung điểm của BC. Chứng minh: $AT \perp EF$.
- Lấy I đối xứng với H qua E. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt IA tại K. Chứng minh: KC, AH, EF đồng quy.

Câu 7. Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Từ A, vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CD cắt CD, BC tương ứng tại E và F. Đường thẳng qua A vuông góc với BD, cắt EF tại M. Chứng minh

- $\Delta ICD \sim \Delta MFA$.
- $ME = MF$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$;

b) DM; EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED;

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D , cắt tia BA tại E .

a) Chứng minh: $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM \cdot BD + CM \cdot CA$ có giá trị không đổi.

c) Kẻ $DH \perp BC, (H \in BC)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, DH. Chứng minh $CQ \perp PD$.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Qua B và C lần lượt vẽ các đường thẳng d, d' vuông góc với BC. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AM cắt d, d' lần lượt tại P và Q.

MP cắt AB tại I, MQ cắt AC tại K.

1. Chứng minh: tứ giác AIMK là hình chữ nhật.

2. Đường thẳng AC cắt d tại E, EM cắt d' tại F. Chứng minh: EF vuông góc BQ.

3. Cho $AM = a$, tính PQ theo a trong trường hợp $BE = CQ$.

Câu 11. Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trên tam giác kẻ $MN \parallel BC; PQ \parallel AB; IK \parallel AC$,

$(I, M \in AB; N, P \in AC; Q, K \in BC)$ Biết rằng: $S_{IMF} = 9 \text{ cm}^2; S_{PFN} = 16 \text{ cm}^2; S_{FQK} = 25 \text{ cm}^2$. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Giáo viên: Thầy Trần Ngọc Hà

Toán lớp 8: Nền tảng chuyên
BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI (tiếp)

Tài liệu lớp học Zoom 8A0 - 14h30 - 17h45 - Chiều chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: Ngày học:

Câu 1. Cho $x; y; z > 0$ và thoả $x + y + z \leq 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

Câu 2. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn: $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

Câu 3. Cho $a; b; c > 0$ và thoả $abc = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Câu 4. Cho $a; b; c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$

Câu 5. Cho $a; b > 0$ và thoả $a^2 + b^2 = 9$. Chứng minh: $\frac{ab}{a+b+3} \leq \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Câu 6. Cho các số dương a, b, c : $a + b + c = 1$. Chứng minh: $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$

Câu 7. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh: $\frac{a^4}{b+c} + \frac{b^4}{c+a} + \frac{c^4}{a+b} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{2}$

MỘT SỐ BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Câu 8. Cho các số a, b, c thoả mãn điều kiện $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$

(Thành phố HCM 2022 – 2023)

Câu 9.

a) Cho các số nguyên a, b thoả mãn $(a^2 - 4ab + b^2) : 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + a^2b + 4ab^2) : 3$$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + xy - 2021x - 2022y - 2023 = 0$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

Câu 10. Cho a, b, c là ba số thực dương thoả $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 3$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

Câu 11.

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x + y + z = 2; xyz = -1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 18$.

Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$

b) Giải phương trình $x^4 - 5x^2 + 6x - 5 = 0$

(Thanh Ba – Phú Thọ 2022 – 2023)

Câu 12. Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được 2 số gọi là a và b sao cho $(a^2 - b^2):11$

(Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 – 2023)

Câu 13. Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a + b \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b}$

(Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 – 2023)

Câu 14. Cho ba số x, y, z khác 0 và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4. \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $P = (x^{2019} + y^{2019})(y^{2019} + z^{2019})(z^{2019} + x^{2019})$

(Nhu Xuân – Thanh Hóa 2022 – 2023)

Câu 15. Chứng minh rằng có một số tự nhiên N gồm toàn chữ số 9 sao cho số N đó chia hết cho 2019.

(Liên Chiêu – Đà Nẵng 2022 – 2023)

Câu 16. Sáu điểm phân biệt thuộc một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là $3\text{cm}, 4\text{cm}$ (các điểm này có thể nằm trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong sáu điểm này mà bình phương khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 5.

(Thanh Chương – Nghệ An 2022 – 2023)

Câu 17. Cho 5 số nguyên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng luôn lớn hơn tổng hai số còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích năm số nguyên đó.

(Tam Dương – Vĩnh Phúc 2022 – 2023)

Câu 18. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $(2014^{2014} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$

(Chí Linh – Hải Dương 2022 – 2023)

Câu 19. Cho n là một số nguyên dương lẻ. Ta viết các số $1; 2; 3; \dots; 2n$ lên bảng. Ta thực hiện việc xóa đi hai số bất kỳ trên bảng, chẳng hạn là a và b và thay vào đó số $|a - b|$. Việc đó được thực hiện đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Hỏi với cách làm như trên thì số 2020 có trên bảng hay không? hãy giải thích

(Nho Quan – Ninh Bình 2022 – 2023)

Câu 20. Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng mà 3 đỉnh đó cùng màu hoặc đôi một khác màu

(Diễn Châu – Nghệ An 2022 – 2023)

Câu 21. Cho a, b, c là các số thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$S = \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1}$$

(Ba Vì – Hà Nội 2022 – 2023)

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt