

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 8

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - ÁP DỤNG CAUCHY TÌM GTNN CỦA BIỂU THỨC MỘT BIẾN

Tài liệu lớp học zoom 8.2 - 18h - 19h30 - Tối thứ tư - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:.....Ngày học:.....

I. BĐT Cauchy

BĐT Cauchy với 2 số dương: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, ($\forall a, b > 0$).

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

II. Một số BĐT phụ hay sử dụng (để nhìn nhận nhanh) khi áp dụng BĐT Cauchy.

1. Lý thuyết

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + cd$$

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$4ab \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b} \quad (a, b > 0)$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

2. Bài tập

Câu 1. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$

Câu 2. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{x^2 + y^2} + \frac{3}{xy}$.

Câu 3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn ĐK $a + b + c = 1$. Chứng minh $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$.

Câu 4. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm GTNN $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy}$.

Câu 5. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{x^2 + y^2} + \frac{4}{xy}$.

III. Áp dụng Cauchy tìm GTNN của biểu thức một biến

1. Phương pháp tìm điểm rơi với BĐT Cô-si để chứng minh và tìm cực trị

Điểm rơi trong BĐT là các giá trị của biến (thỏa mãn ĐK xác định của đề bài) khi dấu “=” xảy ra.

- Biểu thức với biến có điều kiện ràng buộc thì cực trị của biểu thức thường xảy ra tại các vị trí biên.

- Biểu thức có tính đối xứng giữa các biến thì dấu “=” thường xảy ra khi các biến bằng nhau.

2. Bài tập

Câu 6. Cho $x \geq 2$, tìm GTNN của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$.

Câu 7. Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + \frac{1}{2x}$

Câu 8. Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a + \frac{1}{a}$

Câu 9. Chứng minh rằng: với $\forall x > 2$ thì $x + 2 + \frac{1}{x-2} \geq 6$

Câu 10. Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + x + \frac{3}{x} + 15$.

Giáo viên: Nguyễn Thành Long