

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7**  
**BÀI TOÁN HÌNH TRONG CÁC KÌ THI HỌC SINH GIỎI**  
**Tài liệu lớp học Zoom 7M1 - 18h00 - 21h15 - Tối thứ 3**

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ). Vẽ về phía ngoài  $\triangle ABC$  các tam giác đều là  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $CD$  và  $BE$ ,  $K$  là giao điểm của  $AB$  và  $DC$ .

- 1) Chứng minh  $\triangle ADC = \triangle ABE$ .
- 2) Chứng minh  $\widehat{DIB} = 60^\circ$ .
- 3) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $CD$  và  $BE$ . Chứng minh  $\triangle AMN$  đều.
- 4) Chứng minh  $IA$  là tia phân giác  $\widehat{DIE}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , cân tại  $A$ . Gọi  $D$  là hình chiếu của  $B$  trên  $AC$ , và  $E$  là hình chiếu của  $D$  trên  $BC$

- a) Tính số đo góc  $BDE$  theo số đo của góc  $BAC$
- b) Biết  $BC = AB + AD$ , chứng minh rằng  $BE = CD$ .

(VTMC lớp 7 2023)

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại đỉnh  $A$ . Lấy  $D$  bất kì trên  $BC$ .  $H$  và  $I$  là hình chiếu của  $B$  và  $C$  xuống đường thẳng  $AD$ .

- a) Gọi  $G$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh các tam giác  $AGB$  và  $AGC$  vuông cân
- b) Chứng minh khi  $D$  di chuyển trên  $BC$  thì phân giác góc  $HIC$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- c) Xác định vị trí điểm  $D$  trên  $BC$  để chu vi tam giác  $AIC$  lớn nhất.

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân có đáy là  $BC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Kẻ  $NH$  vuông góc với  $CM$  tại  $H$ . Kẻ  $HE$  vuông góc với  $AB$  tại  $E$ . Kẻ  $AK$  vuông góc với  $CM$  tại  $K$ . Kẻ  $AQ$  vuông góc với  $HN$  tại  $Q$ .

- a) Chứng minh rằng  $AK = HC = AQ$ . Tính số đo góc  $BKA$ .
- b) Chứng minh tam giác  $ABH$  cân và  $HM$  là tia phân giác của góc  $BHE$ .
- c) Gọi  $I$  là điểm di động trên tia  $CA$ ,  $J$  là điểm di động trên tia  $CB$ . Xác định vị trí các điểm  $I, J$  sao cho tam giác  $HJI$  có chu vi bé nhất.

**Câu 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\widehat{BAC} < 90^\circ$ . Ở khác phía điểm  $C$  so với đường thẳng  $AB$ , vẽ đoạn  $AM$  sao cho  $AM$  vuông góc với  $AB$  và  $AM = AB$ . Ở khác phía điểm  $B$  so với đường thẳng  $AC$  vẽ đoạn  $AN$  sao cho  $AN$  vuông góc với  $AC$  và  $AN = AC$ .

- a) Chứng minh  $\triangle AMC = \triangle ANB$ .
- b) Chứng minh  $BN$  vuông góc với  $CM$ .
- c) Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC$  ( $H \in BC$ ),  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh ba điểm  $A, H, I$  thẳng hàng.

**Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm D trên đoạn thẳng AB (D khác A và B), đường thẳng vuông góc với MD tại M cắt AC tại E.

a) Chứng minh:  $MD = ME$ .

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho  $CK = BD$ , DK cắt BC tại I, đường vuông góc với DK tại I cắt AM tại S. Chứng minh: I là trung điểm của DK và SC vuông góc với AK.

c) Chứng minh:  $MD + ME \geq AD + AE$ .

**Câu 7.** Cho tam giác ABC có góc B bằng  $45^\circ$ , góc C bằng  $120^\circ$ . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho  $CD = 2CB$ . Tính góc ADB

**Câu 8.** Cho tam giác ABC có  $AB < AC$ . Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm I. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho  $AD = AB$ .

a) Chứng minh rằng  $BI = ID$ .

b) Tia DI cắt tia AB tại điểm E. Chứng minh rằng  $\triangle IBE = \triangle IDC$ . Từ đó suy ra  $BD \parallel CE$ .

c) Gọi H là trung điểm của EC. Chứng minh  $AH \perp BD$ .

d) Cho  $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ . Chứng minh  $AB + BI = AC$ .

**Câu 9.**

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a)  $BH = AI$

b) Tính góc AIM.

2) Cho tam giác ABC có góc  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Chứng minh rằng  $AB + AC < BC + AH$ .

**Câu 10.** Cho tam giác ABC có  $AB < AC$ . Gọi M là trung điểm của BC, từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N và cắt tia AB tại E, cắt tia AC tại F.

a. Chứng minh rằng  $\triangle ANE = \triangle ANF$ .

b. Chứng minh rằng  $AE = \frac{AB + AC}{2}$ .

**Câu 11.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, AD vuông góc với BC tại D. Xác định I; J sao cho AB là trung trực của DI; AC là trung trực của DJ; IJ cắt AB; AC lần lượt ở L và K. Chứng minh rằng.

a)  $\triangle AIJ$  cân

b) DA là tia phân giác của góc LDK

c)  $BK \perp AC$ ;  $CL \perp AB$

d) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC. Chứng minh rằng góc IAJ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

**Câu 12.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các trung tuyến  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $G$ . Trên tia đối của tia  $DB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $DB = DM$ . Trên tia đối của tia  $EC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $EN = EC$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\triangle ADM = \triangle CDB$  và 3 điểm  $M, A, N$  thẳng hàng;
- b)  $BM + CN > 3BC$
- c) Các đường thẳng  $AG, NB, MC$  đồng quy.

**Câu 13.**

1. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), lấy  $N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BN = BA$ . Kẻ  $BH$  vuông góc với  $AN$  tại  $H$ .

a. Chứng minh:  $\triangle ABH = \triangle NBH$ .

b. Lấy điểm  $M$  thuộc tia  $CB$  sao cho  $CM = CA$ , tia phân giác của góc  $C$  cắt  $AN$  tại  $E$ . Chứng minh  $\triangle AEM$  vuông cân.

2. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $\hat{C} = 15^\circ$ . Trên tia  $BA$  lấy điểm  $I$  sao cho  $BI = 2AC$ . Chứng minh  $\triangle BIC$  cân.

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Từ điểm  $E$  trên cạnh  $AB$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt các đường thẳng  $BC$  và  $AC$  thứ tự tại  $H$  và  $M$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BE$ . Từ  $H$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $K$ .

a) Chứng minh tam giác  $BHE$  cân

b) Chứng minh  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MC$ .

c) Cho điểm  $O$  nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $OA = OC$  và  $\widehat{AOC} = 150^\circ$ . Chứng minh  $AB = OB$

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), đường trung tuyến  $AM$ , đường cao

$AH$  ( $H \in BC; M \in BC$ ). Trên tia đối của tia  $MA$  lấy điểm  $K$  sao cho  $MA = MK$ . Trên tia  $HC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $HD = HA$ . Đường vuông góc với  $BC$  tại  $D$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Gọi  $F$  là hình chiếu của  $E$  trên  $AH$ .

a) Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  bằng tam giác  $CKA$ ; so sánh  $\widehat{CAM}$  và  $\widehat{CKM}$

b) Tính số đo góc  $BEC$

**Câu 16.**

1) Cho  $\widehat{xAy} = 60^\circ$  vẽ tia phân giác  $Az$  của góc đó. Từ một điểm  $B$  trên tia  $Ax$  vẽ đường thẳng song song với  $Ay$  cắt  $Az$  tại  $C$ . Kẻ  $BH \perp Ay$  tại  $H, CM \perp Ay$  tại  $M, BK \perp AC$  tại  $K$ . Chứng minh:

a)  $KC = KA$                       b)  $BH = \frac{AC}{2}$

c)  $\triangle KMC$  đều

2) Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A, \hat{A} = 80^\circ$ . Ở miền trong tam giác lấy điểm  $I$  sao cho.

$\widehat{IBC} = 10^\circ, \widehat{ICB} = 30^\circ$ . Tính  $\widehat{AIB}$ .

**Câu 17.** Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

1) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B. Gọi H là trung điểm của BC, trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho  $AI = BC$ . Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và  $BI \perp CE$ .

2) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M. Phân giác của góc BDA cắt BC tại N. Chứng minh rằng:  $BD = \frac{1}{2}MN$ .

**Câu 18.** Cho tam giác ABC có  $AB < AC$ . Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho  $CD = AB$ . Gọi P, Q là trung điểm của AD, BC, và I là giao điểm các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q.

a) Chứng minh  $\triangle AIB = \triangle DIC$

b) Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC.

c) Kẻ IE vuông góc với AB, chứng minh  $AE = \frac{1}{2}AD$ .

**Câu 19.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ , vẽ đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho  $AE = AB$

1) Chứng minh:  $BD = DE$ .

2) Gọi K là giao điểm của AB và ED. Chứng minh rằng:  $\triangle DBK = \triangle DEC$ .

3)  $\triangle ABC$  cần có thêm điều kiện gì để D cách đều ba cạnh của  $\triangle AKC$ .