BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ví dụ 1. Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Ví dụ 2. Cho bảng vuông gồm n x n ô vuông. Mỗi ô vuông ghi một trong các số 1; 0; 2. Chứng minh rằng không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột, trên hàng, trên đường chéo là các số khác nhau.

Ví dụ 3. Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

Ví dụ 5. Cho tập $A = \{1; 2; 3; ...; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Ví dụ 6. Cho 2014 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2014 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2014.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Ví dụ 8. Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt(hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau bốn vòng đấu(mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định còn đúng không nếu mỗi đội thi đấu đúng 5 trận.

Ví dụ 9. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$

Ví dụ 10. Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Ví dụ 11. Cho lưới ô vuông kích thước $5x5$. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số $1; 0; -1$. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Ví dụ 12. Cho $n \ge 3$ số nguyên dương $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho tổng của ba số bất kỳ trong n số đó luôn là một số nguyên tố.

Ví dụ 13. Mỗi đỉnh của hình lập phương được điền một trong các số $1;2;3;4;5;6;7;8$. Hai đỉnh khác nhau điền hai số khác nhau. Người ta tính tổng hai số ở hai đỉnh kề nhau. Chứng minh rằng trong các tổng tính được có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Ví dụ 14. Cho tập hợp $X = \left\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; ...; \sqrt{2024}\right\}$. Chứng minh rằng trong 90 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x - y| < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 15. Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kỳ của tập hợp $\{0;1;2;...;14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con B_1, B_2 của tập hợp A(B_1, B_2 khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp bằng tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_2.

Ví dụ 16. Trong hình vuông cạnh bằng 1 ta đặt 51 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Ví dụ 17. Trong hình tròn đường kính bằng 5 có 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

Ví dụ 18. Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Ví dụ 19. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm chung.

Ví dụ 20. Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá 5 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Ví dụ 21. Cho 1000 điểm . $M_1, M_2, ..., M_{1000}$. trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính bằng 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho $SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \ge 1000$.

Ví dụ 22. Cho chín đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 23. Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong 2 màu đen và trắng. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Ví dụ 24. Trong mặt phẳng cho 6 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được tô màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là các đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được tô cùng một màu.

Ví dụ 25. Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.

Ví dụ 26. Cho 6 điểm trong mặt phẳng sao cho bất kì ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác có các cạnh chiều dài khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh là cạnh nhỏ nhất của một tam giác vừa là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

Ví dụ 27. Chứng minh rằng từ sáu số vô tỉ tùy ý có thể chọn ra được ba số (ta gọi ba số đó là a, b,c) sao cho $a+b, b+c, c+a$ cũng là số vô tỉ.

Ví dụ 28. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Ví dụ 29. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC}=60^o$, $BC=2\sqrt{3}$ cm. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

Ví dụ 30. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh răng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

Chủ đề: DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Câu 1. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có $\widehat{A}=\widehat{A'}$ thì $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\dfrac{A'B'\cdot A'C'}{AB\cdot AC}$

Câu 2. Tính các góc của một tam giác vuông, biết rằng diện tích tam giác đó bằng $\frac{1}{8}$ diện tích hình vuông có cạnh là cạnh huyền.

Câu 3. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của DE. BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt MD ở G. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt ME ở H. Chứng minh rằng GH song song với BC.

Câu 4. Cho tam giác ABC có diện tích S, điểm D thuộc cạnh AB sao cho $AD=\frac{1}{3}AB$, điểm E thuộc cạnh BC sao cho $BE=\frac{2}{5}BC$. Gọi O là giao điểm của $.AE$. và CD, F là giao điểm của BO và AC. Tính diện tích tam giác DEF.

Câu 5. Cho tam giác ABC. điểm D thuộc cạnh BC. Đường thẳng đi qua D và song song với AC cắt AB ở E. Đường thẳng đi qua D và song song với AB cắt AC ơ F. Gọi I là giao điểm của DE và BF, K là giao diểm của DF và CE. Đặt $S_{CDK}=S_1, S_{BI)I}=S_2$. Chứng minh rằng :

a) IK song song với BC;

b) $S_1+S_2=S_{DI:}$.

Câu 6. Cho tam giác $.ABC(AB<AC)$., đường trung tuyến AM. Điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{CAM}$. Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Biết diện tích các tứ giác $BDHF$ và $CDHE$ bằng nhau. Chứng minh rằng $AB=AC$.

Câu 8. Cho hình tthang $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC, OI cắt AB tại E, cắt CD tại F

a) Chứng minh: $\dfrac{OA+OB}{OC+OD}=\dfrac{LA+IB}{IC+ID}$

b) Chứng minh: $EA=EB$

c) Kẻ $OP//AB, P\in AD$, Chứng minh: $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{1}{OP}$

d) Nếu $CD = 3AB$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng $48cm^2$. Tính diện tích tứ giác $IAOB$

Câu 9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, D nằm trong . $\triangle ABC$. sao cho $CD = CA$; lấy $M \in AB$ sao cho $\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\widehat{ACD}$, gọi N là giao điểm của MD và đường cao AH của $\triangle ABC$.

a) Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho $CF = CA$. Chứng minh $\widehat{AFD} = \widehat{BAD}$

b) Chứng minh HA là phân giác của $\widehat{DHF}$.

c) Chứng minh $MD = DN$.

Giáo viên: Thầy Bùi Minh Mẫn