Toán lớp 9: Nền tảng chuyên
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9A0 – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:.. Ngày học:....................................

Câu 9. Cho $a,b>0$ và $a^2+b^2+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab.$$

HD:

Ta có: $8\ge a^2+b^2+6ab\ge 2ab+6ab=8ab\Leftrightarrow ab\le 1$

Và $a^2+b^2+6ab\le 8\Leftrightarrow a^2+b^2\le 8-6ab\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2+b^2}\ge\dfrac{1}{8-6ab}$

Khi đó $P=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{3}{ab}+ab\ge\dfrac{1}{8-6ab}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{ab}+ab$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\ge\dfrac{16}{x+y+z+t}$ ta có:

$$\frac{1}{8-6ab}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}\ge\frac{16}{8}=2$$

Mặt khác $ab\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2ab}\ge\dfrac{1}{2}$

Và $\dfrac{1}{ab}+ab\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}.ab}=2$

$$\Rightarrow P\ge 2+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Câu 13. Cho a, b là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2\le 2$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 6.$$

HD:

Ta có: $a\sqrt{3a\left(a+2b\right)}\overset{Cauchy}{\le} a\dfrac{3a+a+2b}{2}=2a^2+ab$

$$b\sqrt{3b\left(b+2a\right)}\overset{Cauchy}{\le} b\frac{3b+b+2a}{2}=2b^2+ab$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 2a^2+ab+2b^2+ab=4+2ab\le 4+a^2+b^2=6$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 6.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$