BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
NGUYÊN LÝ DIRICHLET
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ví dụ 8. Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt(hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau bốn vòng đấu(mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định còn đúng không nếu mỗi đội thi đấu đúng 5 trận.

Ví dụ 9. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3;6;9\}$

Ví dụ 10. Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Ví dụ 11. Cho lưới ô vuông kích thước $5x5$. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số $1;0;-1$. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Ví dụ 12. Cho $n \ge 3$ số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho tổng của ba số bất kỳ trong n số đó luôn là một số nguyên tố.

Ví dụ 13. Mỗi đỉnh của hình lập phương được điền một trong các số $1;2;3;4;5;6;7;8$. Hai đỉnh khác nhau điền hai số khác nhau. Người ta tính tổng hai số ở hai đỉnh kề nhau. Chứng minh rằng trong các tổng tính được có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Ví dụ 14. Cho tập hợp $X = \{1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}\}$. Chứng minh rằng trong 90 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x-y| < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 15. Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kỳ của tập hợp $\{0;1;2;...;14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con B_1, B_2 của tập hợp A(B_1, B_2 khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp bằng tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_2.

Ví dụ 16. Trong hình vuông cạnh bằng 1 ta đặt 51 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Ví dụ 17. Trong hình tròn đường kính bằng 5 có 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

Ví dụ 18. Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Ví dụ 19. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm chung.

Ví dụ 20. Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá 5 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Ví dụ 21. Cho 1000 điểm . $M_1, M_2, ..., M_{1000}$. trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính bằng 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho $SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \geq 1000$.

Ví dụ 22. Cho chín đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 23. Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong 2 màu đen và trắng. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Ví dụ 24. Trong mặt phẳng cho 6 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được tô màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là các đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được tô cùng một màu.

Ví dụ 25. Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.

Ví dụ 26. Cho 6 điểm trong mặt phẳng sao cho bất kì ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác có các cạnh chiều dài khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh là cạnh nhỏ nhất của một tam giác vừa là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

Ví dụ 27. Chứng minh rằng từ sáu số vô tỉ tùy ý có thể chọn ra được ba số (ta gọi ba số đó là a, b,c) sao cho $a + b, b + c, c + a$ cũng là số vô tỉ.

Ví dụ 28. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Ví dụ 29. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC} = 60^o$, $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

Ví dụ 30. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh răng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}\,cm$.

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN
Tài liệu lớp học Zoom 8M1 – 14h30 – 17h15 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Câu 1. Trên bảng viết 23 số 1 và 4 số (-1). Mỗi lần ta xóa hai số và thay bởi số 1 nếu xóa hai số giống nhau và thay bởi số (-1) nếu xóa hai số khác nhau. Hỏi sau 26 lần xóa thì trên bảng còn lại số gì?

Câu 2. Viết các số 1;2;3;…; 2023 lên bảng. Mỗi lần chơi ta xoá 2 số bất kỳ thay bởi tích của chúng. Hỏi sau 2022 lần chơi thì còn lại số nào?

Câu 3. Cho các số 2,2,0,4,2,0,2,3 được viết trên 1 vòng tròn. Cứ 2 số cạnh nhau ta cộng thêm 1 vào hai số đó. Hỏi sau 1 số lần thực hiện thao tác trên các số trên vòng tròn có thể đều bằng nhau được không?

Câu 4. Một tờ giấy bị cắt nhỏ thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh. Các mảnh nhận được lại có thể chọn để cắt (thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh nhỏ hơn) ... Cứ như vậy ta có thể nhận được 2023 mảnh cắt không ?

Câu 5. Trên bảng ghi các số $\frac{1}{2022};\frac{2}{2022};...;\frac{2022}{2022}$. Mỗi 1 lần thực hiện cho phép xóa đi 2 số a;b bất kỳ trên bảng và thay bằng $a+b-2ab$. Hỏi sau 2021 lần thực hiện phép xóa thì số còn lại trên bảng là số nào?

Câu 6. Ghi các số $2^1;2^2;...;2^{2023}$ lên bảng. Mỗi lần ta xóa 1 số và thay bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số đều có 1 chữ số. CMR cuối cùng số các số 2 nhiều hơn số các số 1.

Câu 7. Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kỳ. Ta thực hiện xóa 2 dấu bất kỳ trong đó và viết vào đó 1 dấu cộng nếu xóa 2 dấu giống nhau và 1 dấu trừ nếu xóa 2 dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì nếu ta thực hiện thao tác trên 24 lần?

Câu 8. Viết lên bảng các số tự nhiên từ 1 đến 4046, sau đó mỗi lần chọn ra 2 số bất kỳ a và b và viết lại 1 số bằng $a-b$. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại trên bảng là 1 số lẻ.

Câu 9. (**Thi thử vào 10 chuyên toán sư phạm 2022**) Loan ghi lên bảng một số thực dương N. Sau đó, Loan thực hiện việc xoá và ghi thêm số, theo quy tắc sau: Mỗi lần xoá một số tuỳ ý đang có trên bảng, gọi là a, rồi ghi lên bảng hai số thực dương b,c sao cho $bc\le 4a^2$. Sau 99 lần thực hiện xoá và ghi thêm số như vậy, trên bảng sẽ có đúng 100 số (không nhất thiết phân biệt). CMR trong 100 số đó, có ít nhất một số không lớn hơn $100N$.

Hd xét tổng các nghịch đảo.

Câu 10. Trên bảng cho 2014 số tự nhiên từ 1 đến 2014. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xoá đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{ab}{2}$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.

Câu 11. Trên bảng viết các số $\frac{1}{2015};\frac{2}{2015};...;\frac{2015}{2015}$. Mỗi lần biến đổi, xóa đi hai số a, b bất kỳ và thay bằng số $ab-5ab$. Hỏi sau 2014 lần thực hiện phép biến đổi trên bảng còn lại số nào?

Câu 12. Trên bảng đen viết ba số $\sqrt{2};2;\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào 2 vị trí vừa xoá hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. CMR dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số $1+\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Giáo viên: Thầy Minh