

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11**  
**TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Tài liệu lớp học 11A1 - 18h - 21h15 - Tối thứ năm - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  của hàm số tại điểm  $M(x_0, y_0)$ .

Khi đó, phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(x_0, y_0)$  là:  $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Nguyên tắc chung để lập được phương trình tiếp tuyến là ta phải tìm được hoành độ tiếp điểm  $x_0$ .

**II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP**

**DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT TIẾP ĐIỂM**

**1. Phương pháp**

**Bài toán:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C): y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0, y_0)$

**Phương pháp giải:**

- Bước 1: Tính đạo hàm  $y' = f'(x) \Rightarrow$  hệ số góc tiếp tuyến  $k = y'(x_0)$ .
- Bước 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm  $M(x_0, y_0)$  có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

**Chú ý:**

- Nếu đề cho (hoành độ tiếp điểm)  $x_0$  thì tìm  $y_0$  bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức là:  
 $y_0 = f(x_0)$
- Nếu đề cho (tung độ tiếp điểm)  $y_0$  thì tìm  $x_0$  bằng cách giải phương trình  $f(x_0) = y_0$ .
- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị  $(C): y = f(x)$  và đường thẳng  $d: y = ax + b$ . Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa  $d$  và  $(C)$ .

Đặc biệt: Trục hoành  $Ox: y = 0$  và trục tung  $Oy: x = 0$ .

**2. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C): y = x^3 + 2x^2$  tại điểm  $M(1;3)$  là

- A.  $y = 7x + 4$ .      B.  $y = 7x - 4$ .      C.  $y = -7x + 4$ .      D.  $y = -7x - 4$ .

**Ví dụ 2:** Cho điểm M thuộc đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  và có hoành độ bằng -1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là

A.  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      B.  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .      C.  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ .      D.  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ .

**Ví dụ 3:** Cho điểm M thuộc đồ thị (C):  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$  có hoành độ  $x_0 > 0$  và  $y''(x_0) = -1$ . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

A.  $y = -3x + \frac{5}{4}$                       B.  $y = 3x + \frac{5}{4}$ .  
C.  $y = 3x - \frac{19}{4}$ .                      D.  $y = -3x - \frac{19}{4}$ .

## **DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT PHƯƠNG (Biết hệ số góc k)**

### **1. Phương pháp**

**Bài toán:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc k cho trước.

#### **Phương pháp giải:**

- Bước 1: Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm và tính  $y' = f'(x)$ .
- Bước 2:
- Hệ số góc tiếp tuyến là  $k = f'(x_0)$ .
- Giải phương trình này tìm được  $x_0$ , thay vào hàm số được  $y_0$ .
- Bước 3: Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng:

$$d: y = y_0'(x - x_0) + y_0$$

**Chú ý:** Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến  $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$ .

Sau khi lập được phương trình tiếp tuyến thì nhớ kiểm tra lại xem tiếp tuyến có bị trùng với đường thẳng  $\Delta$  hay không? Nếu trùng thì phải loại đi kết quả đó. + Tiếp tuyến

$$d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k \cdot a = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{a}.$$

- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc  $\alpha$  thì  $k = \pm \tan \alpha$ . Tổng quát: Tiếp tuyến tạo với đường thẳng  $\Delta: y = ax + b$  một góc  $\alpha$ .

Khi đó:  $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$ .

## 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x + 2$  có hệ số góc bằng 9 là

- A.  $y = 9x - 18; y = 9x + 22$                       B.  $y = 9x - 14; y = 9x + 18$ .  
C.  $y = 9x + 18; y = 9x + 22$ .                      D.  $y = 9x - 14; y = 9x - 18$

**Ví dụ 2:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  song song với đường thẳng  $\Delta: 3x - y + 2 = 0$  có phương trình là

- A.  $y = 3x - 4$ .                      B.  $y = 3x + 2$ .                      C.  $y = 3x + 14$ .                      D.  $y = 3x + 4$ .

## DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC

### 1. Phương pháp

**Bài toán:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$ .

**Phương pháp giải:**

**Cách 1: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị**

- Bước 1: Phương trình tiếp tuyến đi qua  $A(x_A; y_A)$  hệ số góc  $k$  có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

- Bước 2:  $d$  là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$  có nghiệm.
- Bước 3: Giải hệ trên tìm được  $x \Rightarrow k$  và thế vào phương trình (\*), thu được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

**Cách 2:**

- Bước 1: Gọi  $M(x_0; f(x_0))$  là tiếp điểm. Tính hệ số góc tiếp tuyến  $k = f'(x_0)$  theo  $x_0$ .
- Bước 2: Phương trình tiếp tuyến có dạng:  $d: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  (\*\*). Vì điểm  $A(x_A; y_A) \in d$  nên  $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ . Giải phương trình này sẽ tìm được  $x_0$ .
- Bước 3: Thay  $x_0$  vừa tìm được vào (\*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

### 2. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = -4x^3 + 3x + 1$  đi qua điểm  $A(-1; 2)$  có phương trình là

- A.  $y = -9x + 7; y = -x + 2$ .                      B.  $y = -9x - 11; y = -x + 2$ .  
C.  $y = -9x + 11; y = 2$ .                              D.  $y = -9x - 7; y = 2$ .

**Ví dụ 2:** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  đi qua điểm  $A(-1;4)$  có phương trình là

A.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ .

B.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .

C.  $y = \frac{1}{3}x + 4$ .

D. Không tồn tại tiếp tuyến.

#### **DẠNG 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ**

**Ví dụ 1:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1.

Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng

d:  $y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$ ?

A.  $m = 1$ .

B.  $m = -1$ .

C.  $m = 2$ .

D.  $m = -2$ .

**Ví dụ 2:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$  có đồ thị (C). Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số có

hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A vuông góc với

đường thẳng  $\Delta: x - 4y + 1 = 0$ ?

A.  $m = 1$ .

B.  $m = -1$ .

C.  $m = 2$ .

D.  $m = -2$ .

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$  có đồ thị  $(C_m)$ . Với giá trị nào của tham số

m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị  $(C_m)$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x - 2y - 4 = 0$ ?

A.  $m = -2$ .

B.  $m = -1$ .

C.  $m = 0$ .

D.  $m = 4$ .

**Ví dụ 4:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  có đồ thị (C). Giả sử, đường thẳng d:  $y = kx + m$  là tiếp tuyến của

(C), biết rằng d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác  $\Delta OAB$  cân

tại gốc tọa độ O. Tổng  $k + m$  có giá trị bằng

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. -3.

**Ví dụ 5** [Sở GD & ĐT Vũng Tàu - 2017]: Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị (C)

của hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  cắt đường thẳng  $y = 2x + m^2$  tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C)

tại hai điểm đó song song với nhau.

A.  $\{2\}$ .

B.  $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ .

C.  $\{-1; 1\}$ .

D.  $\{-2; 2\}$ .

### III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

**Câu 1.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là

- A.  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$       B.  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$       C.  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$       D.  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

**Câu 2.** Tiếp tuyến của (C):  $y = x^4 - 2x^2$  tại điểm có hoành độ bằng -2 có phương trình là

- A.  $y = -24x - 40$       B.  $y = -24x + 40$       C.  $y = 24x - 40$       D.  $y = 24x + 40$

**Câu 3.** Tiếp tuyến của (C):  $y = 5x + 1 + \frac{1}{2(x-1)}$  tại điểm  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  có phương trình là

- A.  $y = 2x - \frac{3}{2}$       B.  $y = -2x + \frac{3}{2}$       C.  $y = 3x - 1$       D.  $y = 3x + 1$

**Câu 4.** Tiếp tuyến của (C):  $y = \frac{2x-2}{x-2}$  tại điểm có tung độ bằng 3 có phương trình là

- A.  $y = \frac{1}{2}x - 5$       B.  $y = \frac{1}{2}x + 5$       C.  $y = -\frac{1}{2}x + 5$       D.  $y = -\frac{1}{2}x - 5$

**Câu 5.** Tiếp tuyến của (C):  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$  tại điểm có tung độ bằng 4 có phương trình là

- A.  $y = -12x - 8$       B.  $y = -12x + 8$       C.  $y = 12x - 8$       D.  $y = 12x + 8$

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 + 2$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình  $y'' = 0$  có phương trình là

- A.  $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$       B.  $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$       C.  $y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{4}$       D.  $y = -\frac{9}{2}x + \frac{3}{4}$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - x + 1$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ dương và là nghiệm của phương trình  $y' + x \cdot y'' - 11 = 0$  có phương trình là

- A.  $y = -x - 3$       B.  $y = -4x + 2$       C.  $y = -x + 2$       D.  $y = -4x - 3$

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

- A.  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$       B.  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$       C.  $y = -3x + 2$       D.  $y = -3x - 2$

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = \frac{-2x+3}{x-1}$  có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) và đường  $\Delta: y = x - 3$  là

A.  $y = x - 3x; y = x + 1$ .                      B.  $y = -x - 3; y = -x + 1$ .

C.  $y = x - 3; y = -x + 1$ .                      D.  $y = -x - 3; y = x + 1$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x - 2$  có đồ thị (C). Số phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm (C) với đường thẳng  $\Delta : x + y + 2 = 0$  là

A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có đồ thị (C). Biết điểm  $M \in (C)$  sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng 2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

A.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ .                      B.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .

C.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .                      D.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}; y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm  $M \in (C)$  có tọa độ nguyên dương có phương trình là

A.  $y = 1$ .                      B.  $y = -1$ .                      C.  $y = -x - 1$ .                      D.  $y = -x + 5$ .

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 - 4$  có đồ thị (C). Biết điểm  $M \in (C)$  sao cho  $x_M < 0$  và  $x_M$  là nghiệm của phương trình  $y'' = -4$ . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình là

A.  $y = 24x + 16$ .                      B.  $y = -24x + 16$ .                      C.  $y = -24x - 80$ .                      D.  $y = 24x - 80$ .

**Câu 14.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có hệ số góc  $k = 1$  có phương trình là

A.  $y = x + 1; y = x + 5$ .                      B.  $y = x - 1; y = x - 5$ .

C.  $y = x + \frac{1}{2}; y = x + 5$ .                      D.  $y = x + 1; y = x - \frac{5}{4}$ .

**Câu 15.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 3$  song song với đường thẳng  $\Delta : 9x - y - 24$  có phương trình là

A.  $y = 9x - 24$ .                      B.  $y = 9x + 8$ .                      C.  $y = 9x - 10$ .                      D.  $y = 9x + 30$ .

**Câu 16.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  song song với đường thẳng  $\Delta : 5x + y - 13 = 0$  có phương trình là

A.  $y = -5x - 8; y = -5x - 2$ .                      B.  $y = -5x - 2; y = -5x + 22$ .

C.  $y = -5x + 2; y = -5x + 22$ .                      D.  $y = -5x + 2; y = -5x - 8$ .

**Câu 17.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-4}{x+1}$  tại M có dạng  $y = kx + m$ . Biết tiếp tuyến

tại M song song với đường thẳng  $\Delta: 3x - 2y + 19 = 0$ . Khi đó, tổng  $k + m$  có giá trị bằng

- A. 11.                      B. 4.                      C. -8.                      D. -1.

**Câu 18.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = x^3 + 3x^2 + 5$  vuông góc với đường  $d: x + 9y = 0$  có phương trình là

- A.  $y = 9x; y = 9x + 32$ .                      B.  $y = 9x - 22; y = 9x + 18$ .  
C.  $y = 9x; y = 9x - 32$ .                      D.  $y = 9x + 22; y = 9x - 18$ .

**Câu 19.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = -x^4 - x^2 + 6$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: y = \frac{1}{6}x - 1$  có phương trình là

- A.  $y = -6x - 2$ .                      B.  $y = -6x + 2$ .                      C.  $y = -6x + 10$ .                      D.  $y = -6x - 10$ .

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$  có đồ thị (C). Gọi  $d: y = kx + m$  là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hệ số góc tiếp tuyến nhỏ nhất. Tỉ số  $T = 2m : k$  có giá trị bằng

- A.  $T = -7$ .                      B.  $T = -5$ .                      C.  $T = 5$ .                      D.  $T = 7$ .

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị (C). Hai điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn  $AB = 4\sqrt{2}$  là

- A.  $A(-2;1); B(2;-3)$ .                      B.  $A(3;1); B(-1;-3)$ .  
C.  $A(0;-1); B(4;3)$ .                      D.  $A(-3;2); B(1;-2)$ .

**Câu 22.** Tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  đi qua điểm  $A(-1;3)$  có phương trình là

- A.  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$                       B.  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ .                      C.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ .                      D.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x+1}$  có đồ thị (C). Giả sử đường thẳng  $d: y = kx + m$  là tiếp tuyến của (C)

và tiếp tuyến này đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục hoành Ox. Tỉ số  $T = k : m$  có giá trị bằng

- A. 2.                      B. -2.                      C. 1.                      D. -1.

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng

$\Delta: x + y - 1 = 0$  một góc  $\alpha$  sao cho  $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$  và tiếp điểm có hoành độ nguyên có phương trình là





**Câu 31.** [THPT Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2017] Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 1$  có đồ thị là (C).

Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến của (C) tại điểm  $A(1;5)$  và B là giao điểm thứ hai của  $\Delta$  với (C). Tính diện tích S của tam giác OAB, với O là gốc tọa độ.

- A.  $S = 12$ .                      B.  $S = 6$ .                      C.  $S = 15$ .                      D.  $S = 24$ .

**Câu 32.** [THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2017] Cho hàm số  $y = x^3 - 6x + 2$ . Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(1; -3)$  ?

- A. 3.                                B. 2.                                C. 0.                                D. 1.

**Câu 33.** [THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - Lần 2 - 2017] Cho hàm số  $y = \frac{x+b}{ax-2}$  có đồ thị (C)

. Biết a, b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(1; -2)$  song song với đường thẳng  $d: 3x + y - 4 = 0$ . Tính a + b.

- A.  $a + b = 0$ .                      B.  $a + b = -1$ .                      C.  $a + b = 2$ .                      D.  $a + b = 1$ .

**Câu 34.** [THPT Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2017] Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị (C). Gọi d là khoảng

cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C). Tìm giá trị lớn nhất của d.

- A.  $d_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $d_{\max} = \sqrt{5}$ .                      C.  $d_{\max} = \sqrt{3}$ .                      D.  $d_{\max} = \sqrt{6}$ .

**Giáo viên: Thầy Nguyễn Thành Long**