BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

CA 1

Câu 10. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$.CMR:

$x+y+z \geq xy+yz+zx$

HD:

Đặt $S=x+y, P=xy$. Từ điều kiện đã cho ta có $z=\frac{4-S}{1+P}$.

BĐT đã cho trở thành:

$S+\frac{4-S}{1+P} \geq P+\frac{4-S}{1+P} \Leftrightarrow f(P)=P^2+(1-S)P-(S-2)^2 \leq 0$

Ta có là hàm bậc hai và $0 \leq P \leq \frac{S^2}{4}$ nên $f(P) \leq \max\left\{f(0), f\left(\frac{S^2}{4}\right)\right\}$ Để ý rằng $S \leq 4$ ta dễ dàng kiểm tra

được $f(0) \leq 0$ và $f\left(\frac{S^2}{4}\right) \leq 0$. $\Rightarrow$ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ và các hoán vị.

Câu 11. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$. Tìm GTNN của:

$$P=4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz$$

HD:

Vai trò x, y, z như nhau: $x \geq y \geq z \geq 0$

$4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz \geq 1$

$\Leftrightarrow 4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz \geq (x+y+z)^3$

$\Leftrightarrow 3\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+5xyz \geq (x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2-xz-y^2+yz\right)+z(z-x)(z-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0 (*)$

Do $x\ge y\ge z\Rightarrow(*)$ luôn đúng

Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x=y=z=\frac{1}{3}\\ z=0;x=y=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Câu 12. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau và thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

HD:

Giả sử $0\leqslant c\leqslant b\leqslant a\leqslant 2$

Đặt $\begin{cases} x=a-b\\ y=b-c\\ z=a-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ 0\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$

Có: $x+y=z\leqslant 2$

$S=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

$S\geqslant\frac{2}{xy}+\frac{1}{4}$

$xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}\leqslant 1$

$\Rightarrow S\geqslant\frac{2}{1}+\frac{1}{4}$

Min $S=\frac{9}{4}$ khi $\begin{cases} x=y=1\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2\\ b=1\\ c=0\end{cases}$

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

HD:

GTNN của A là $\frac{1}{3}$. GTLN của A là 3.

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=3x^2+3y^2+z^2+5xy-3yz-3zx-2x-2y+3$

HD:

Ta có $A=\left[z-\frac{3}{2}(x+y)\right]^2+\frac{3}{4}\left(x+\frac{y}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}(y-1)^2+1\ge 1$

Câu 16. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$$

HD:

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3\geq 9-\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-9abc]\geq 0$$

Câu 17. Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $ab\geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq \frac{2}{1+ab}$

HD:

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được dãy các đánh giá sau:

$$\frac{2+a^2+b^2}{a^2b^2+a^2+b^2+1}\geq \frac{2}{1+ab}2+2ab+a^3b+b^3a+a^2+b^2-2a^2b^2-2a^2-2b^2-2\geq 0(ab-1)(a-b)^2\geq 0$$

Đánh giá cuối cùng đúng do $ab\geq 1$, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Câu 18. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}$$

HD:

Nhân hai vế với a+b+c, đưa bất đẳng thức về dạng

$$\frac{2a^3}{b+c}-a^2+\frac{2b^3}{c+a}-b^2+\frac{2c^3}{a+b}-c^2\geq 0$$

Câu 19. Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $1\leq a\leq 3; 1\leq b\leq 3; 1\leq c\leq 3$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=a^2+b^2+c^2$.

HD:

Câu 5.1 : Solution by Putin Đào.

$F = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 36 - 2(ab+bc+ca)$

$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow abc - (ab+bc+ca) + a+b+c-1 \geq 0$

$(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \Rightarrow -abc + 3(ab+bc+ca) - 9(a+b+c) + 27 \geq 0$

Suy ra: $2(ab+bc+ca) \geq 8(a+b+c) - 26$

$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) \geq 22 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 11.$

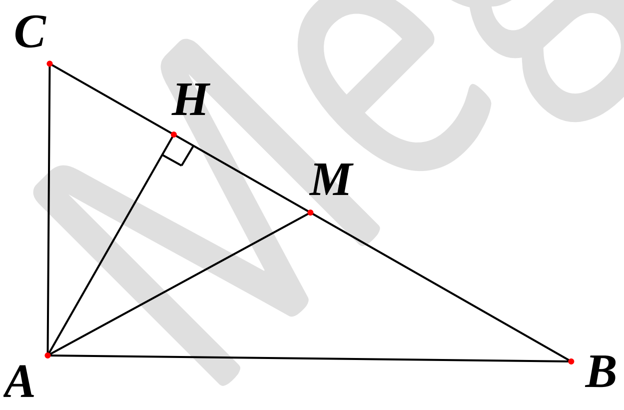
$\rightarrow P \leq 36 - 22 = 14$

Vậy $P_{max} = 14 \Leftrightarrow (a,b,c) = (1;2;3)$ và hoán vị

CA 2

Câu 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^o$, $\widehat{ABC} = 15^o$**,** đường trung tuyến AM và đường cao AH. Tìm tan B.

HD:



Vì tam giác MAB cân tại M, nên $\widehat{AMC} = 30^o$.

Tam giác AHM vuông tại H có $\widehat{AMH} = 30^o$**,** $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC$

Mặt khác, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC$ nên

$$AB.AC = \frac{1}{4}BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 4AB.AC \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 4AB.AC$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - 4AB.AC + AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - 4\frac{AC}{AB} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 2 - \sqrt{3} (AC < AB)$$

Hay $\tan 15^o = 2 - \sqrt{3}$

Công thức này được ứng dụng khá nhiều trong giải toán, đặc biệt là các bài toán tính số đo của 1 góc.