**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN**
**HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ**
**Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật**

**Họ và tên: ....................................................................Ngày học: .......................................................**

## ĐẠI SỐ

**Câu 11.** Cho $x>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

HD:

Có $M=4x^2-4x+1+x+\frac{1}{4x}+2010$

$$=(2x-1)^2+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2010\ge 0+2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}+2010=2011.$$

Vậy $\operatorname{Min}M=2011$ khi $x=\frac{1}{2}$

**Câu 12.** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2\le x+y$. Tìm giá trị lớn nhất của: $x+3y$.

HD:

Theo giả thiết ta có: $x^2+y^2\le x+y\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$

Để làm xuất hiện $x+3y$ ta dùng Bunhiacopxki như sau:

$$\left[1.\left(x-\frac{1}{2}\right)+3.\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 10\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le 5$$

$$\Rightarrow (x+3y-2)^2\le 5\Rightarrow x+3y-2\le\sqrt{5}\Leftrightarrow x+3y\le 2+\sqrt{5}$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\\ y=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}\end{cases}$

**Câu 13.** Cho $x>0,y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy.$$

HD:

Có $P=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$. Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\ \forall a,b>0$, ta được

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge\frac{4}{1^2}=4(\text{do } 0<x+y\le 1)$. Suy ra $P\ge 4+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$.

Đặt a = xy, do $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \frac{1}{4}$ ta được:

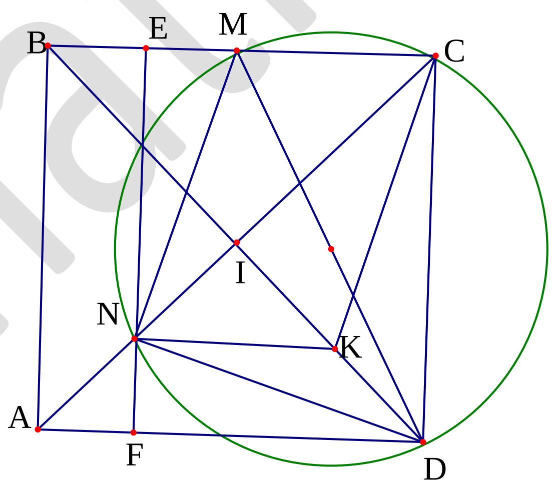
$$P \ge 4 + \left(\frac{1}{2a} + 4a\right) = 4 + \left(\frac{1}{2a} + 8a\right) - 4a \ge 4 + 2\sqrt{\frac{1}{2a}.8a} - 4a = 8 - 4a \ge 8 - 4.\frac{1}{4} = 7\,(\text{do}\,0 < a \le \frac{1}{4})$$

$\text{Min}\,P = 7\,\text{khi}\,x = y = \frac{1}{2}$

## HÌNH HỌC

**Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm $BC, N$ là điểm thuộc đường chéo $AC$ sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Chứng minh 4 điểm $M, N, C, D$ nằm trên cùng một đường tròn

**HD:**




Ta thấy tứ giác $MCDN$ có $MCD = 90^0$ nên để chứng minh 4 điểm $M, N, C, D$ cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh $MND = 90^0$

<u>**Cách 1:**</u> Kẻ đường thẳng qua $N$ song song với $AB$ cắt $BC, AD$ tại $E, F$.

Xét $\Delta_{\text{vuông}}NEM$ và $\Delta_{\text{vuông}}DFN$ có:

$EM = NF = \frac{1}{4}AB, EN = DF = \frac{1}{4}AB$

=> $\Delta NEM = \Delta DFN$

=> $NME = DNF, MNE = NDF \Rightarrow MNE + DNF = 90^0$

=> $\Delta\, MND$ vuông tại $N$.

Suy ra 4 điểm $M, N, C, D$ cùng nằm trên đường tròn đường kính $MD$

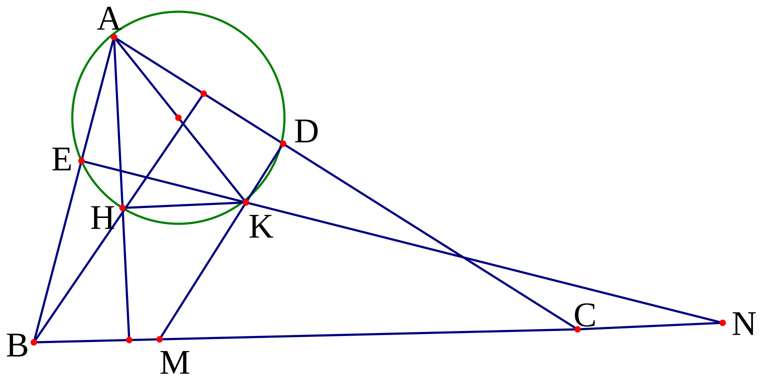
<u>**Cách 2:**</u> Gọi $K$ là trung điểm của $ID$ với $I$ là giao điểm của hai đường chéo.

Dễ thấy $MCKN$ là hình bình hành nên suy ra $CK//MN$.

Mặt khác do $NK \perp CD, DK \perp CN \Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác $CDN \Rightarrow CK \perp ND \Leftrightarrow MN \perp ND$.

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$. Lấy điểm $M, N$ thuộc tia $BC$ sao cho $MN = BC$ và $M$ nằm giữa $B, C$. Gọi $D, E$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M, N$ lên $AC, AB$. Chứng minh các điểm $A, D, E, H$ cùng thuộc một đường tròn.

**HD:**




Giả sử $MD$ cắt $NE$ tại $K$. Ta có $HB//MK$ do cùng vuông góc với $AC$

Suy ra $HBC = KMN$ ( góc đồng vị) .

Tương tự ta cũng có $HCB = KNM$ kết hợp với giả thiết $BC = MN$

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta KMN \Leftrightarrow S_{\Delta BHC} = S_{\Delta KMN} \Rightarrow HK//BC$.

Mặt khác ta có $BC \perp HA$ nên $HK \perp HA$ hay $H$ thuộc đường tròn đường tròn đường kính $AK$.

Dễ thấy $E, D \in (AK)$ nên các điểm $A, D, E, H$ cùng thuộc một đường tròn.