BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 22. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}=\frac{44}{45}$

HD:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Áp dụng đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+.......+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}\text{(dfcm)}$$

Câu 23. Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x(2-x)$

HD:

$$x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2=6+2\sqrt{3^2-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$
$$=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$x>0\Rightarrow x=\sqrt{3}+1\Rightarrow (x-1)^2=3\text{ hay } x^2-2x=2\Rightarrow P=-2$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 33. Tìm các hộ ba số nguyên (a,b,c) thỏa mãn a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}$ là số lẻ khác 1.

HD:

Từ kết quả bài toán 1.7 , ta có:

$$F=\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{\frac{19}{a+b-c}};\sqrt{\frac{5}{b+c-a}};\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}\in\mathbb{Q}$$

Giả sử $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}=\frac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$.

Suy ra $19n^2=(a+b-c)m^2\Rightarrow 19:m^2\Rightarrow m=1.$

Vậy $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}=\frac{1}{n}$. Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}=\frac{1}{p};\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}=\frac{1}{q}\left(n,p,q\in\mathbb{N}^*\right)$

Do đó $F=\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1+1+1=3$

Do giả thiết F là số tự nhiên lẻ khác 1, suy ra:

$$n=p=q=1\Rightarrow\begin{cases}a+b-c=19\\b+c-a=5\\c+a-b=79\end{cases}$$

Do đó: $a=\frac{1}{2}\cdot\left[(a+b-c)+(c+a-b)\right]=\frac{1}{2}\cdot(19+79)=49$

Suy ra $b=12;c=42$.

Vậy bộ số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(a,b,c)=(49;12;42)$

Câu 34. Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$

HD:

Do $\sqrt{2\sqrt{3}-3}>0$, nên $x>y\ge 0$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}-3=x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3xy}\Leftrightarrow(x+y-2)\sqrt{3}=2\sqrt{3xy}-3$

$$\Rightarrow(x+y-2)^2\cdot 3=12xy-12\sqrt{3xy}+9$$
$$\Rightarrow\sqrt{3xy}=\frac{-(x+y-2)^2+4xy+3}{4}\in\mathbb{Q}.$$

Nếu $x+y-2\ne 0$ thì từ (2) suy ra: $\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3xy}-3}{x+y-2}$

Điều này vô lí vì vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ. Vậy $x+y-2=0$, từ (2) suy ra:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2\sqrt{3xy}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Do $x>y\ge 0$ nên suy ra $x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn $x>y\ge 0$)

Câu 35. Chứng minh rằng: $T=\dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125}-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}=6$.

HD:

$$=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125}-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2(74-22\sqrt{10})}{5\sqrt{5}-20\sqrt{2}+10\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})(74-22\sqrt{10})}{15\sqrt{5}-18\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(74-22\sqrt{10})}{5\sqrt{5}-6\sqrt{2}}$$
$$=\frac{30\sqrt{5}-36\sqrt{2}}{5\sqrt{5}-6\sqrt{2}}=6.$$

Câu 36. Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\frac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$$

HD:

$$a^2=8+2\sqrt{16-(10+2\sqrt{5})}=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$
$=8+2(\sqrt{5}-1)=6+2\sqrt{5}$, Vi $a>0$ nen $a=\sqrt{5}+1$.

Do đó $(a-1)^2=5$ hay $a^2-2a=4$.

Biểu diễn $T=\dfrac{\left(a^2-2a\right)^2-3\left(a^2-2a\right)+4}{a^2-2a+12}=\dfrac{4^2-3\cdot 4+4}{4+12}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 37. Rút gọn biểu thức: $B=\left(13-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)-8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$

HD:

$B=\left(13-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)-8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$

$=91+52\sqrt{3}-28\sqrt{3}-48-8\sqrt{\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2}$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)$

$=43+24\sqrt{3}-8\left(2\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}\right)=35$

Câu 38. Cho $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$. Chứng minh x là số hữu tỉ.

HD:

Ta có:

$x^3=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$

$x^3=18+3x\Rightarrow x^3-3x-18=0$

$\Rightarrow (x-3)\left(x^2+3x+6\right)=0$

$\Rightarrow x = 3$. (Do $x^2+3x+6>0\ \ \forall x$)

Vậy *x* là một số hữu tỉ.

Câu 39. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $\frac{11x}{5}-\sqrt{2x+1}=3y-\sqrt{4y-1}+2$ b) $\frac{5x}{3}-y=\sqrt{3x+2}-\sqrt{2y-1}-1$

HD:

a) Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 1$. Ta có $\sqrt{4y-1}$ là số vô tỉ với $y\in\mathbb{N}$ (bình phương của mọi số tự nhiên đều không có dạng $4m-1$. Ta có :

(1) $\Leftrightarrow \frac{11x}{5}-3y-2=\sqrt{2x+1}-\sqrt{4y-1}$.

Với $x,y\in\mathbb{N}$, ta có $\frac{11x}{5}-3y-2$ là số hữu tỉ. Đặt $\frac{11x}{5}-3y-2=q\in\mathbb{Q}$. Do đó:

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{4y-1}=q$.

Suy ra: $\sqrt{2x+1}=q+\sqrt{4y-1}$

$\Rightarrow 2x+1=q^2+2q\sqrt{4y-1}+4y-1$

$\Rightarrow 2q\sqrt{4y-1}=2x-q^2-4y+2.$

Nếu $q \neq 0$ thì $\sqrt{4y-1} = \dfrac{2x-q^2-4y+2}{2q}\left(^*\right)$.

Do $\sqrt{4y-1}$ là số vô tỉ nên $\left(^*\right)$ không xảy ra. Do đó $q=0$. Suy ra:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{4y-1}=0 \\ \dfrac{11x}{5}-3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}=\sqrt{4y-1} \\ 11x-15y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 11x-15y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x,y) là $(5;3)$.

b) Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 1$. Ta có $\sqrt{3x+2}$ là số vô tỉ với $x \in \mathbb{N}$ (bình phương của mọi số tự nhiên đều không có dạng $3m+2$).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \dfrac{5x}{3}-y+1=\sqrt{3x+2}-\sqrt{2y-1}$.

Với $x, y \in \mathbb{N}$, ta có $\dfrac{5x}{3}-y+1$ là số hữu tỉ, đặt $\dfrac{5x}{3}-y+1=q \in \mathbb{Q}$. Ta có: $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2y-1}=q$.

Suy ra: $\sqrt{3x+2}-q=\sqrt{2y-1}$

$$\Rightarrow 3x+2-2q\sqrt{3x+2}+q^2-2y-1$$
$$\Rightarrow 2q\sqrt{3x+2}=3x+q^2-2y+3.$$

Nếu $q \neq 0$ thì $\sqrt{3x+2}=\dfrac{3x+q^2-2y+3}{2q}$ (*).Vì $\sqrt{3x+2}$ là số vô tỉ nên (*) không xảy ra. Suy ra $q=0$.

Do đó:

$$\begin{cases} \sqrt{3x+2}-\sqrt{2y-1}=0 \\ \dfrac{5x}{3}-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=2y-1 \\ \dfrac{5x}{3}-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-3 \\ 5x-3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x,y) là $(3;6)$.

Nhận xét. Chìa khóa trong lời giải của bài toán là nhận xét: Với $a \in \mathbb{Z}^+$ thì $\sqrt{4a-1}, \sqrt{3}a+2$ là các số vô tỉ. Từ đó dựa vào quan hệ giữa số vô tỉ và hữu tỉ, ta suy ra hai vế của các phương trình (*) đều bằng 0 .

Câu 40. Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $y=\sqrt{6x+\sqrt{5x+\sqrt{4x+\sqrt{x}}}}$ b) $y=2+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}$

HD:

a) Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$. Khi đó ta có:

$$(1)\quad \Leftrightarrow y^2=6x+\sqrt{5x+\sqrt{4x+\sqrt{x}}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{5x+\sqrt{4x+\sqrt{x}}}=y^2-6x.$$

Đặt $\sqrt{5x+\sqrt{4x+\sqrt{x}}}=k,k\in\mathbb{N}$.

Ta có: $\sqrt{4x+\sqrt{x}}=k^2-5x$.

Đặt $\sqrt{4x+\sqrt{x}}=m,m\in\mathbb{N}$, suy ra $4x+\sqrt{x}=m^2$, nên $\sqrt{x}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{x}=a,a\in\mathbb{N}$, ta có phương trình bậc hai ẩn $a\in\mathbb{N}:4a^2+a-m^2=0$

Xét $\Delta=1+4m^2$. Phương trình có nghiệm tự nhiên $\Leftrightarrow \Delta=1+4m^2$ là số chính phương

$$\Leftrightarrow \Delta=1+4m^2=n^2\,(n\in\mathbb{N})\Leftrightarrow(n+2m)(n-2m)=1.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n+2m=1\\n-2m=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\m=0\end{cases}.$$

Suy ra $a=0,x=y=0$.

Do đó phương trình có nghiệm (x,y) là $(0,0)$.

b) Điều kiện: $x\ge0,y\ge0$. Khi đó ta có:

$$(2)\Leftrightarrow y=2+\sqrt{x+\frac{1}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}$$
$$\Leftrightarrow y=2+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow y=2+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow y-\frac{5}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}\left(^{*}\right)\Leftrightarrow(2y-5)^2=4x+1,y\ge3$$
$$\Leftrightarrow y^2-5y-(x-6)=0\left(^{**}\right).$$

Phương trình $(**)$ là phương trình bậc hai ẩn y có $\Delta=25+4(x-6)=4x+1$

Phương trình (**) có nghiệm nguyên khi $\Leftrightarrow\Delta$ là số chính phương

$\Leftrightarrow 4x+1=(2t+1)^2,t\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x=t(t+1),t\in\mathbb{N}$.

Khi đó: $x+\dfrac{1}{4}=t^2+t+\dfrac{1}{4}=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2$

Thay vào (*) ta có $y-\dfrac{5}{2}=\sqrt{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow y=t+3$..

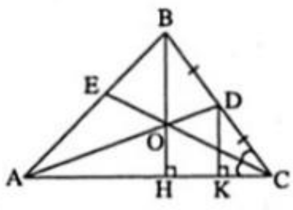
Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases}x=t(t+1)\\y=t+3\end{cases},t\in\mathbb{N}$.

HÌNH HỌC

Câu 7. Cho tam giác ABC. Đường trung tuyến AD, đường cao BH, đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức: $(BA+CA)\left(BC^2+CA^2+AB^2\right)=2BC\cdot CA^2$.

HD:

(h.1-20) Tam giác vuông BHC có:



Hình 1-20

$$CH^2 = BC^2 - BH^2$$
$$= BC^2 - (AB^2 - AH^2)$$
$$= BC^2 - AB^2 + AH^2$$
$$= BC^2 - AB^2 + (CA - CH)^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.CH \Rightarrow CH = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA}.$$

Tương tự, $AH = \dfrac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA}$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} \quad (1)$$

Trong tam giác ADC, CO là phân giác nên $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BC}{2CA}$ (2)

Từ D kẻ DK vuông góc với CA, ta có BH // DK và $HK = \dfrac{HC}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{HK}{HA} = \dfrac{CH}{2HA}$ (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} = \frac{BC}{CA} \Rightarrow \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA^2} = \frac{BC}{BC + CA}.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.