BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x-4}+\sqrt{4x-3}$

HD:

Nhận xét: Quan sát các biểu thức trong căn, ta thấy $(3x+1)+(4x-3)=(x+2)+(6x-4)$ nên ta thực hiện chuyển vế như dưới sau đó bình phương, khi đó sẽ triệt tiêu được các hạng tử chứa x bên ngoài căn.

Điều kiện $x\ge\frac{-1}{3}; x\ge -2; x\ge\frac{4}{6}; x\ge\frac{3}{4}\Rightarrow x\ge\frac{3}{4}$.

$(3)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x-3}=\sqrt{6x-4}-\sqrt{x+2}$ (4)

$\Rightarrow\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x-3}\right)^2=\left(\sqrt{6x-4}-\sqrt{x+2}\right)^2$ (5)

$\Leftrightarrow 7x-2-2\sqrt{(3x-1)(4x-3)}=7x-2-2\sqrt{(6x-4)(x+2)}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(3x-1)(4x-3)}=\sqrt{(6x-4)(x+2)}$

$\Leftrightarrow 12x^2-5x-3=6x^2+8x-8\Leftrightarrow 6x^2-13x+5=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện, ta có $x=\frac{5}{3}$; thử lại thấy $x=\frac{5}{3}$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{5}{3}$.

Chú ý: Do từ (4) đến (5) không phải biến đổi tương đương nên khi giải ra kết quả, ngoài đối chiếu điều kiện ta phải thử lại ở phương trình ban đầu.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-16}=1$

HD:

Điều kiện $x\ge 4$ hoặc $x\le -4$.

$\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-16}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x^2-16}+1\Leftrightarrow x^2-9=x^2-16+2\sqrt{x^2-16}+1$

$\Leftrightarrow 3=\sqrt{x^2-16}\Leftrightarrow x^2-25=0\Leftrightarrow x=\pm 5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$ hoặc $x=-5$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{4-x}$.

HD:

ĐK $x\le 4$.

$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}\ge 0\\ 4+x=2\sqrt{(4-x)(x^2+x+1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-3\le 0\\ 4x^3-11x^2-4x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ 4x^2-11x-4=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{11-\sqrt{185}}{8}\end{array}\right.$$

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3x+5}$.

HD:

Điều kiện : $2x+1\ge 0;3-x\ge 0;3x+5\ge 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 3$.

Khi đó $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3x+5}\Leftrightarrow 2x+1+3-x+2\sqrt{(2x+1)(3-x)}=3x+5$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(3-x)}=2x+1\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}\left(2\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+1}\right)=0.$ (*)

Trường hợp 1: $\sqrt{2x+1}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $x\ne -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+1}=0\Leftrightarrow 4(3-x)=2x+1\Leftrightarrow x=\frac{11}{6}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{1}{2}$ và $x=\frac{11}{6}$.

Bài 5. Giải phương trình $x^4+2x^2+x\sqrt{2x^2+4}=4$

HD:

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

$x^4+2x^2+x\sqrt{2x^2+4}=4\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right)+\sqrt{2}.x.\sqrt{x^2+2}-4=0$

$\Leftrightarrow\left(x.\sqrt{x^2+2}\right)^2+\sqrt{2}.x.\sqrt{x^2+2}-4=0$

$$\Leftrightarrow\left[x\sqrt{\left(x^2+2\right)}-\sqrt{2}\right].\left[x\sqrt{\left(x^2+2\right)}+2\sqrt{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\sqrt{\left(x^2+2\right)}=\sqrt{2}\ (2)\\ x\sqrt{x^2+2}=-2\sqrt{2}\ (3).\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2\left(x^2+2\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x^2=-1-\sqrt{3}\\ x^2=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{-1+\sqrt{3}}.$$

$$(3) \Leftrightarrow x\sqrt{\left(x^2+2\right)} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2\left(x^2+2\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=-4 \\ x^2=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$ hoặc $x=-\sqrt{2}$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2+5x+5}+x^2=\sqrt{x+2}-3x-2$

HD:

Nhận xét

+ $\left(x^2+5x+5\right)-(x+2)=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ và $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ đồng thời $\sqrt{x^2+5x+5}+x^2 \neq 0$.

Nên ta có cách biến đổi $\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}$ để làm xuất hiện nhân tử x+1.

Giải:

ĐK $x \geq \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$.

$$\left(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}\right)+x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x^2+3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

(Do $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2>0, \forall x \geq \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$).

Bài 7(nhân liên hợp). Giải phương trình

a) $\sqrt{3x+5}+x=6+\sqrt{2x+11}$ b) $\sqrt{x^2+2x}+x=1+\sqrt{3x}$

HD:

a) ĐK: $\boldsymbol{x \geq \dfrac{-5}{3}}$.

Nhận thấy $\sqrt{3x+5}, \sqrt{2x+11}$ không đồng thời bằng 0, nên $\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+11} \neq 0$

$$\sqrt{3x+5}+x=6+\sqrt{2x+11}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x+11}\right)+(x-6)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x+11}\right)\left(\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+11}\right)}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+11}}+x-6=0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+11}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=6\left(do\ \frac{1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+11}}+1 \neq 0\right)$$

b) $\sqrt{x^2+2x}+x=1+\sqrt{3x}$.

ĐK: $\boldsymbol{x \geq 0}$.

Nhận thấy $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}=0$ khi $\boldsymbol{x=0}$ nên ta xét:

+ Nếu x=0, thay vào pt, vô lí.

+ Khi $\boldsymbol{x \neq 0}$ thì $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}\neq 0$, do đó ta có:

$$\sqrt{x^2+2x}+x=1+\sqrt{3x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3x}\right)+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}\right)}+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1\left(do\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{3x}}+1\neq 0\right)$$

Bài 8(nhẩm nghiệm, ghép). Giải phương trình

a) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}+x=3$ b) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$

HD

a) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}+x=3$

ĐK: $\boldsymbol{x \geq \frac{-1}{2}}$

(Nhẩm, thấy x=0 là nghiệm. $\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow 1;\ \sqrt{x+4}\Leftrightarrow 2$**. Do đó ta có cách thêm bớt (tách số 3)**

$$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+\left(\sqrt{x+4}-2\right)+x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}+\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}+x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0\left(do\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+1\neq 0\right)$$

b) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$

(Nhận thấy $x=1$ **là một nghiệm của phương trình đã cho, lúc đó**

$\sqrt{x+3}=\sqrt{1+3}=2 \Rightarrow \sqrt{x+3}-2=0$ **và** $\sqrt[3]{5x+3}=\sqrt[3]{5\cdot(1)+3}=2 \Rightarrow \sqrt[3]{5x+3}-2=0$

Khi đó chúng ta có thể thực hiện thêm bớt, nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x-1)$**)**

Điều kiện $x\geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt[3]{5x+3}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Do $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}>0,\forall x\geq -3$

Phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 9. Giải pt $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$.

HD:

Điều kiện xác định của phương trình là $x\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(4x^2-1\right)+\left(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow(2x-1)(2x+1)+\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(2x-1)(2x+1)+\frac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0\Leftrightarrow(2x-1)\left[2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ 2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0\end{array}\right.$$

- Với $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, thỏa mãn điều kiện xác định.
- Với $x\geq 0$ thì $2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}>0$, do đó $2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$ vô nghiệm.