BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN

ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 1. Trên parabol $(P): y = x^2$ ta lấy hai điểm $A(-1;1)$ và $B(3:9)$. Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

HD:

Giải. (h.6)

Giả sử $C(c\,;\,c^2)$ thuộc (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác

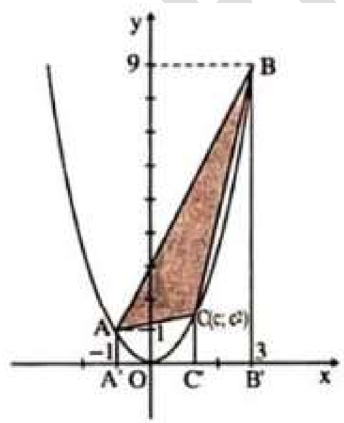
$$S_{ABC} = S_{AA'B'B} - S_{AA'C'C} - S_{BB'C'C}$$

$$= \frac{1+9}{2}.4 - \frac{1+c^2}{2}.(c+1) - \frac{9+c^2}{2}.(3-c)$$

$$= 6 - 2c^2 + 4c$$

$$= 8 - 2(c-1)^2 \le 8.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi C(1 ; 1).



Hình 6

Câu 2. Trên parabol $(P): y = x^2$ ta láy 6 diểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và A_6. Chứng minh ràng, nếu $A_1A_2 // A_4A_5$ và $A_2A_3 // A_5A_6$ thì $A_3A_4 // A_6A_1$.

HD:

Giả sử $A_i\left(a_i; a_i^2\right)$ với $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Ta thấy, điều kiện $A_1A_2 // A_4A_5$ tương đương với điều kiện $\dfrac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = \dfrac{a_5^2 - a_4^2}{a_5 - a_4}$ (xem Kiến thưc bó sung ở Chuyên đề 9) hay $a_2 + a_1 = a_4 + a_5$.

Vậy, từ giả thiết suy ra $a_2 + a_1 = a_4 + a_5$ và $a_5 + a_6 = a_2 + a_3$. Do vạy

$$a_2 + a_1 + a_5 + a_6 = a_4 + a_5 + a_2 + a_3.$$

Từ đây suy ra $a_1 + a_6 = a_4 + a_3$ hay $A_3A_4 // A_6A_1$.

Câu 3. Trên parabol $(P): y = x^2$ ta lấy 6 điểm phân biệt $A_i\left(a_i; a_i^2\right)$ với $i = 1, 2, \ldots, 6$. Giả sử $A_1A_2 \perp A_4A_5$ và $A_2A_3 \perp A_5A_6$. Chứng minh rằng, A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau nếu $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) \neq -1$.

HD:

Hệ số góc của đường thẳng A_1A_2 bằng $\dfrac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = a_2 + a_1$.

Hệ số góc của đường thẳng A_4A_5 bằng $\dfrac{a_5^2 - a_4^2}{a_5 - a_4} = a_5 + a_4$.

Điều kiện $A_1A_2 \perp A_4A_5$ tương đương với điều kiện

$(a_2 + a_1)(a_4 + a_5) = -1$

Tương tự có $(a_2 + a_3)(a_6 + a_5) = -1$.

Nếu $A_3A_4 \perp A_6A_1$ thì $(a_3 + a_4)(a_6 + a_1) = -1$.

Khi đó $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) = -1$.

Như vậy, nếu $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) \neq -1$ thì A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau.

Câu 4. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{4}x^2$. Giả sử hai đường thẳng đi qua $I(0;1)$ cắt (P) ở A_1, B_1 và A_2, B_2 tương ứng. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{IA_1} + \dfrac{1}{IB_1} = \dfrac{1}{IA_2} + \dfrac{1}{IB_2} = 1$

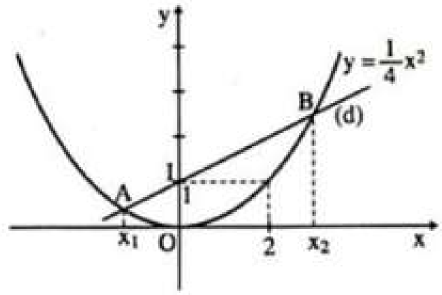
b) $\dfrac{1}{\sqrt{IA_1 \cdot IA_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{IB_1 \cdot IB_2}} \leq 1$.

HD:

a) Đường thẳng (d) đi qua (0 ; 1) và cắt (P) tại hai điểm có dạng $y = kx + 1$.

Giả sử (d) cắt (P) tại A, B (h.7). Khi đó toạ độ của hai điểm A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = kx+1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx+1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx+1 \\ x^2 - 4kx - 4 = 0. \end{cases}$$



Hình 7

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $x^2 - 4kx - 4 = 0$ và $A(x_1 ; kx_1 + 1)$, $B(x_2 ; kx_2 + 1)$.

Ta có thể giả thiết $x_1 < 0 < x_2$. Ta có $x_1 + x_2 = 4k$ và $x_1x_2 = -4$. Biến đổi

$$\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + k^2x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + k^2x_2^2}}$$

$$= \frac{1}{-x_1\sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{x_2\sqrt{1+k^2}} = \frac{x_2}{-x_1x_2\sqrt{1+k^2}} + \frac{-x_1}{-x_1x_2\sqrt{1+k^2}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{(x_2+x_1)^2 - 4x_2x_1}}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{16k^2+16}}{4\sqrt{1+k^2}} = 1.$$

Do đó $\frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} = \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = 1$.

b) Từ câu a) suy ra

$$2 = \frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} + \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = \frac{IA_1 + IA_2}{IA_1.IA_2} + \frac{IB_1 + IB_2}{IB_1.IB_2} \geq \frac{2\sqrt{IA_1IA_2}}{IA_1.IA_2} + \frac{2\sqrt{IB_1IB_2}}{IA_1.IA_2}.$$

Do đó $1 \geq \frac{1}{\sqrt{IA_1.IA_2}} + \frac{1}{\sqrt{IB_1.IB_2}}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol $(P): y = x^2$. Giả sử góc vuông $\widehat{uIv}$ thay đổi, nhưng hai cạnh của nó luôn luôn tiếp xúc với (P). Chứng minh rằng đỉnh I chạy trên một đường thẳng cố định.

HD:

Giải. (h.8)

Giả sử góc vuông $\widehat{uIv}$ với đỉnh I(a ; b) và phương trình hai cạnh góc vuông

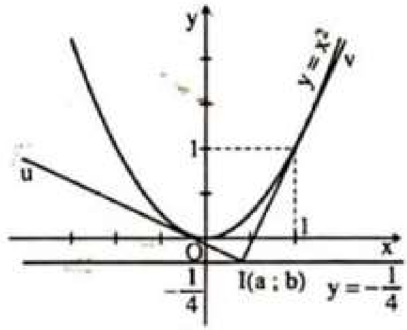
(uI): $y = k(x - a) + b$,

(vI) : $y = k'(x - a) + b$ trong đó $k.k' = -1$.

Vì hai cạnh góc vuông này tiếp xúc (P) nên các phương trình

$x^2 - kx + ka - b = 0$ và $x^2 - k'x + k'a - b = 0$

đều có nghiệm kép.



Hình 8

Vậy $\Delta_1 = k^2 - 4ka + 4b = 0$ và $\Delta_2 = k'^2 - 4k'a + 4b = 0$.

Từ đây suy ra k và k' là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 4ta + 4b = 0$.

Vì $k.k' = -1$ nên $4b = -1$ hay $b = -\frac{1}{4}$.

Điều này chỉ ra đỉnh góc vuông $I\left(a; -\frac{1}{4}\right)$ chạy trên đường thẳng cố định

$$(d): y = -\frac{1}{4}.$$

Câu 6. Cho phương trình $(m+1)x^3 + (3m-1)x^2 - x - 4m + 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

HD:

$$(m+1)x^3 + (3m-1)x^2 - x - 4m + 1 = 0 (1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^3 - (m+1)x^2 + 4mx - 4m - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2(x-1) + 4m(x-1)(x+1) - (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0 (2) \end{array}\right.$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) là phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Điều kiện để phương trình (2) là phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 4m^2 - (m+1)(4m-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào (2), ta có:

$(m+1)\cdot 1^2 + 4m\cdot 1 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow 9m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Phương trình (2) là phương trình bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $m \neq -1, m \neq 0, m < \frac{1}{3}$

Câu 7. Cho phương trình $x^3 + mx^2 - x + m - m^2 = 0\,(*)$ với tham số m. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

HD:

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - m \\ x^2 + x - m = 0 \end{array}\right.$$

Điều kiện để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt là $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 2 \pm \sqrt{2}$.

Khi đó $x_1 = 1 - m; x_2 + x_3 = -1; x_1.x_2 = -m$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 3 \Leftrightarrow (1-m)^2 + 1 + 2m = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Kết hợp điều kiện có nghiệm ta nhận $m=1$.

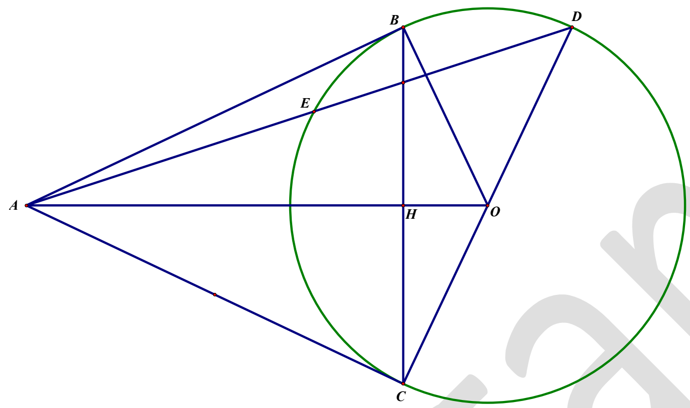
HÌNH HỌC

Câu 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC tới (O), (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh 4 điểm $A;B;O;C$ cùng thuộc đường tròn

b) Kẻ đường kính CD của (O); DA cắt (O) tại $E(E\neq D)$. Chứng minh $OA\perp BC$ và $AE.AD=AH.AO$

HD:



a) AB là tiếp tuyến (O) $\Rightarrow \widehat{ABO}=90^o$

AC là tiếp tuyến (O) $\Rightarrow \widehat{ACO}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^o \Rightarrow$ B, C thuộc đường tròn đường kính AO $\Rightarrow$ ĐPCM

b) Ta có: $\widehat{BOA}=\widehat{COA}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow$ OH là tia phân giác $\widehat{BOC}$

Mà ΔBOC cân tại O

$\Rightarrow OH\perp BC$ hay $OA\perp BC$

Chứng minh được: $AB^2=AH.AO$; $AC^2=AE.AD$

Mà $AB=AC$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AE.AD=AH.AO$

Câu 2. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O,R). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn tâm là các tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của MO với AB.

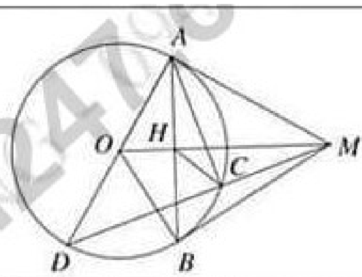
a) Chứng minh rằng: 4 điểm M,A,O,B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $MO\perp AB$ tại H.

c) Nếu $OM=2R$ hãy tính độ dài MA theo R và tính số đo các góc $\widehat{AMB},\widehat{AOB}$?

d) Kẻ đường kính AD của đường tròn $(O), MD$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C. Chứng minh rằng: $\widehat{MHC} = \widehat{ADC}$.

HD:

$OAM = OBM = 90°$ nên A, B thuộc đường tròn đường kính OM. Suy ra ĐPCM. 
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $MA = MB$ và MO là tia phân giác của góc AMB. Do đó MO đồng thời là đường cao của tam giác cân AMB. Suy ra $MO \perp AB$ tại H.
+) Áp dụng định lí Py-ta-go, tính được $MA = R\sqrt{3}$. +) Áp dụng tỉ số lượng giác, tính được $AMB = 30°$. Suy ra $AOM = 60°$. Do đó, $AOB = 2.AOM = 120°$.
+) Chỉ ra $MH.MO = MD.MC = AM^2$. Suy ra $\frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}$. +) Chỉ ra $\Delta MHC \sim \Delta MDO$ (c.g.c). Suy ra $MHC = ADC$

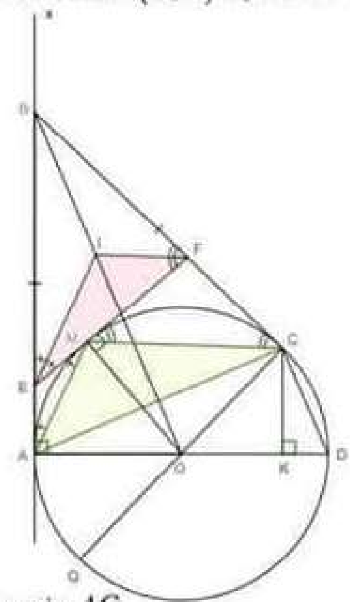
Câu 3. Lấy điểm A trên (O, R), vẽ tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy điểm B, trên $(O;R)$ lấy điểm C sao cho $BC = AB$.

a) Chứng minh rằng: CB là tiếp tuyến của (O).

b) Vẽ đường kính AD của (O), kẻ CK vuông góc với AD. Chứng minh ràng $CD//OB$ và $BC.DC = CK.OB$ *(Đề thi học kì 1 Toán 9 Nam Từ Liêm 2019 – 2020)*

HD:

2. Lấy điểm A trên $(O;R)$, vẽ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm B, trên $(O;R)$ lấy điểm C sao cho $BC = AB$



a. Chứng minh CB là tiếp tuyến của $(O;R)$

Xét ΔBAO và ΔBCO có

$BA = BC$ (giả thiết)

BO chung

$OA = OC(= R)$

$\Rightarrow \Delta BAO = \Delta BCO(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{BCO}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{BCO} = 90^0$

Vậy CB là tiếp tuyến của $(O;R)$

b. Vẽ đường kính AD của $(O;R)$, kẻ $CK \perp AD$.

Chứng minh $CD//OB$ và $BC.DC = CK.OB$

Ta có $\left.\begin{matrix} BA = BC(gt) \\ OA = OC(=R) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OB$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow OB \perp AC$ (1)

Mà AB là đường kính của (O)

$C \in (O)$

$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow DC \perp AC$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow OB//DC$ (đpcm)

Ta có ΔOCD cân tại O (vì $OC = OD = R$)

$\Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ (tính chất)

Mà $CD//OB \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{OCD}$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{BOC}$

Xét ΔBOC và ΔCDK có

$\widehat{ODC} = \widehat{BOC}$

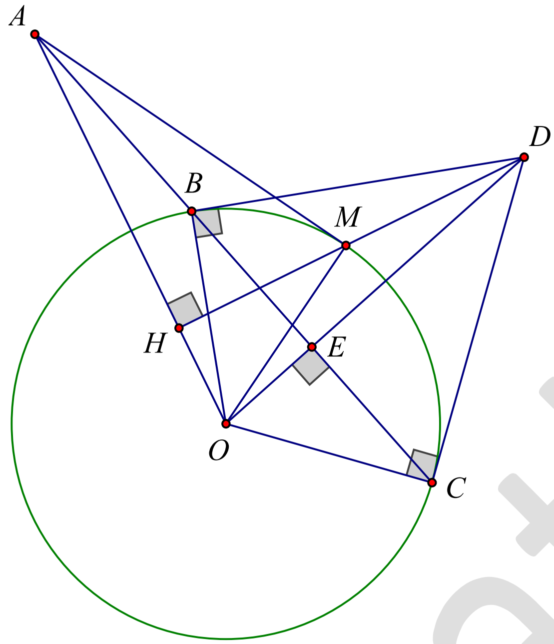
$\widehat{CKD} = \widehat{BCO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta CDK(g.g) \Rightarrow \dfrac{BC}{CK} = \dfrac{OB}{DC}$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BC.DC = CK.OB$ (đpcm)

Câu 4. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ cát tuyến ABC không đi qua tâm O của đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại D, kẻ DH vuông góc với $AO (H \in AO)$, DH cắt cung nhỏ BC tại M. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

HD:



Gọi $BC \cap OD = \{E\}$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $BC \perp OD$.

Xét tam giác AOE và tam giác DOH có:

$\widehat{O}$ chung

$\widehat{AEO} = \widehat{DHO} = 90^0$

Nên $\Delta AOE \sim \Delta DOH\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{OE}{OH} = \dfrac{OA}{OD} \Rightarrow OH.OA = OE.OD$

Xét tam giác OBD vuông tại B có $BE \perp OD$ áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta có: $OE.OD = OB^2 = R^2$ mà $R = OM, OH.OA = OE.OD$ nên

$OH.OA = OM^2$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OM}{OA}$

Xét tam giác OMH và tam giác OAM có:

$\dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OM}{OA}$(cmt)

$\widehat{O}$ chung

Suy ra $\Delta OHM \sim \Delta OMA\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{OMA} = 90^0$

Suy ra $AM \perp OM$ tại M nên AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M