BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9M1 – 14h30 – 17h45 – Chiều chủ nhật

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 8. Tìm ba số x, y, z nguyên dương thỏa mãn: $\dfrac{x-y\sqrt{2021}}{y-z\sqrt{2021}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

HD:

Từ giả thiết, đặt $\dfrac{x-y\sqrt{2021}}{y-z\sqrt{2021}}=\dfrac{m}{n}$ (1), trong đó m, n là các số nguyên thỏa mãn $n>0, (m,n)=1$.

Từ (1) suy ra: $nx-my=(ny-mz)\sqrt{2021}$

Nếu $ny-mz\neq 0$, thì $\sqrt{2021}=\dfrac{nx-my}{ny-mz}$ (3).

Vì $\sqrt{2021}$ là số vô tỉ và m, n, x, y, z là các số nguyên, nên (3) không xảy ra.

Vậy từ (2) suy ra $nx-my=ny-mz=0 \Leftrightarrow \begin{cases} nx=my \\ ny=mz \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{y}{z} \Rightarrow xz=y^2$

Do dó:

$$x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=(x+z+y)(x+z-y)$$

Vì $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố và $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1, nên $x+y-z=1$.

Do đó $x^2+y^2+z^2=x+z+y$ (4).

Mà $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, nền $x^2 \geq x, y^2 \geq y, z^2 \geq z$.

Do đó đẳng thức (4) chỉ xảy ra khi $x^2=x, y^2=y, z^2=z$. Suy ra $x=y=z=1$.

Khi đó $\dfrac{x-y\sqrt{2021}}{y-z\sqrt{2021}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$, thỏa mãn các điều kiện đề bài.

Vậy $x=y=z=1$.

Câu 9. Tìm các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\dfrac{3}{a+b\sqrt{3}}-\dfrac{2}{a-b\sqrt{3}}=7-20\sqrt{3}$.

HD:

Điều kiện: $a \neq \pm\sqrt{3}b$.

Từ giả thiết có: $\dfrac{a-5b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=7-20\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow a-5b\sqrt{3}=\left(7-20\sqrt{3}\right)\left(a^2-3b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow a-5b\sqrt{3}=7\left(a^2-3b^2\right)-20\sqrt{3}\left(a^2-3b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3}\left(4a^2-12b^2-b\right)=7a^2-21b^2-a\left(^*\right).$$

Nếu $4a^2-12b^2-b\neq 0$ thì $\sqrt{3}=\dfrac{7a^2-21b^2-a}{4a^2-12b^2-b}$

(vô lí, vì $a,b\in\mathbb{Q}$). Suy ra: $\begin{cases}4a^2-12b^2-b=0\\7a^2-21b^2-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\left(a^2-3b^2\right)=b & (1)\\7\left(a^2-3b^2\right)=a & (2)\end{cases}$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{7}\Rightarrow b=\dfrac{4}{7}a$, thay vào (1) ta có:

$$4\left[a^2-3\cdot\left(\frac{4}{7}a\right)^2\right]=\frac{4}{7}a\Leftrightarrow a^2-3\cdot\frac{16}{49}a^2=\frac{a}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{7}\left(\frac{a}{7}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=7\end{array}\right.$$

Với $a=0$, suy ra $b=0$ không thỏa mãn.

Với $a=7$, suy ra $b=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $a=7, b=4$.

Câu 10. Tìm các số thực a sao cho $a+\sqrt{2009}$ và $\dfrac{16}{a}-\sqrt{2009}$ đều là số nguyên.

HD:

Đặt $x=a+\sqrt{2009},\ y=\dfrac{16}{a}-\sqrt{2009}$, (với $x,y\in\mathbb{Z}$).

Thay $a=x-\sqrt{2009}$ vào biểu thức y, ta có:

$$y=\frac{16}{x-\sqrt{2009}}-\sqrt{2009}$$
$$\Leftrightarrow (y-x)\sqrt{2009}=xy-2025.$$

Nếu $x\neq y$ thì $\sqrt{2019}=\dfrac{xy-2025}{y-x}$ vô lý vì $x,y\in\mathbb{Z}$. Vậy $x=y$. Suy ra $xy-2025=0$. Từ đó suy ra

$x=y=\pm 45\Rightarrow a=\pm 45-\sqrt{2009}$.

Thử lại với $a=\pm 45-\sqrt{2009}$ thì ta có $x,y\in\mathbb{Z}$.

HÌNH HỌC

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $MB < MA$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\widehat{MON} = 90°$. Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

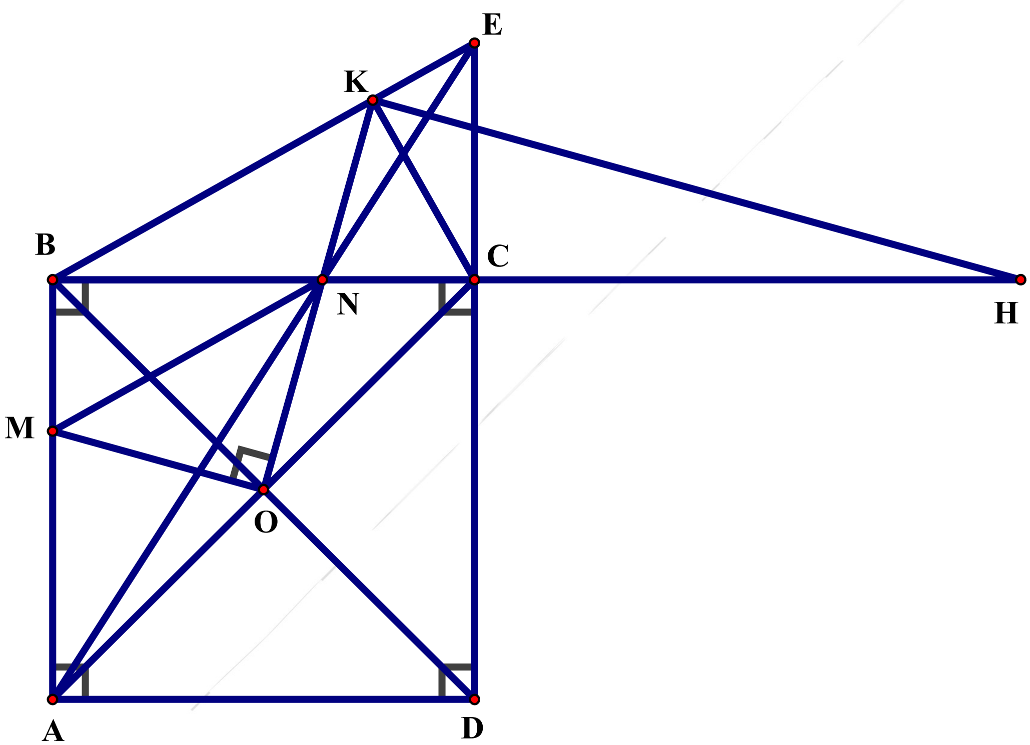
a) Chứng minh ΔMON vuông cân.

b) Chứng minh $MN // BE$.

c) Chứng minh $CK \perp BE$.

d) Qua K vẽ đường thẳng song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$.

HD:



a) Xét ΔAOM và ΔBON có:

$\widehat{OAM} = \widehat{OBN} = 45°$

$OA = OB$ (tính chất hình vuông)

$\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (cùng phụ với $\widehat{BOM}$)

$\Rightarrow \Delta AOM = \Delta BON$ (g.c.g)

$\Rightarrow OM = ON$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔMON có $OM = ON$ và $\widehat{MON} = 90°$

$\Rightarrow \Delta MON$ vuông cân tại O.

b) Ta có $\Delta AOM = \Delta BON$ (câu a) $\Rightarrow AM = BN$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AB - BM = BC - CN$

$\Rightarrow BM = CN$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{BN}{CN}$ (1)

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB // CD$ (tính chất hình vuông) hay $AB // CE$ $\Rightarrow \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AN}{EN}$ (hệ quả định lí Talet). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AN}{EN}$

Xét ΔABE có $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AN}{EN} \Rightarrow MN // BE$ (định lí Talet đảo).

c) Ta có $MN // BE$ (theo câu 2) $\Rightarrow \widehat{MNO} = \widehat{BKO} = 45^\circ$ (đồng vị)

Mà $\widehat{BCO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BCO} = \widehat{BKO} = 45^\circ$ hay $\widehat{BKN} = \widehat{OCN}$

$\Rightarrow \Delta BNK \backsim \Delta ONC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BN}{ON} = \dfrac{KN}{CN} \Rightarrow \dfrac{BN}{KN} = \dfrac{ON}{CN}$

$\Rightarrow \Delta BON \backsim \Delta KCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CKN} = \widehat{OBN} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BKO} + \widehat{CKN} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow CK \perp BE$

d) Ta có $KH // OM$, $OM \perp OK \Rightarrow KH \perp OK$ hay $KH \perp NK$

$\Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{NKH} - \widehat{CKN} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\Rightarrow$ KC là phân giác của $\widehat{NKH}$.

Mà $CK \perp BE \Rightarrow KB$ là phân giác ngoài tại đỉnh K của ΔNKH.

$\Rightarrow \dfrac{KN}{KH} = \dfrac{CN}{CH} = \dfrac{BN}{BH}$ (Tính chất đường phân giác của tam giác) (1)

Tương tự KN là phân giác trong và KH là phân giác ngoài của ΔBKC

$\Rightarrow \dfrac{KC}{KB} = \dfrac{CN}{BN} = \dfrac{CH}{BN}$ (Tính chất đường phân giác của tam giác) (2)

Từ (1) và (2)
$$\begin{aligned}&\Rightarrow \frac{KN}{KH} + \frac{KC}{KB} = \frac{BN + CH}{BH}\\ &\Rightarrow \frac{KN}{KH} + \frac{KC}{KB} + \frac{CN}{BH} = \frac{BN + CH}{BH} + \frac{CN}{BH} = \frac{BN + CH + CN}{BH} = 1\end{aligned}$$

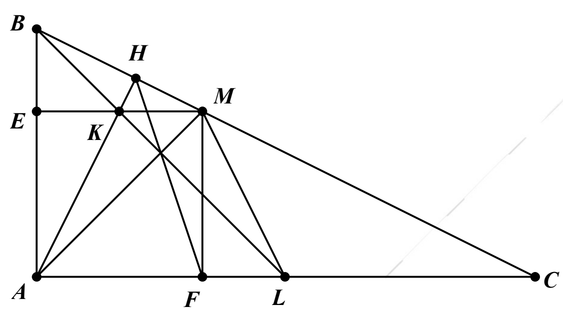
Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ có đường cao AH và đường phân giác AM. Kẻ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F. Gọi K là giao điểm của AH và ME. Tia BK cắt AC tại L

1) Chứng minh $CM \cdot CH = CF \cdot CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

3) Chứng minh $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{HB}{HC}$.

HD:



1) Chứng minh $CM.CH = CF.CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC.

Xét ΔCMF và ΔCAH có:

$\hat{C}$ chung;

$\widehat{CFM} = \widehat{CHA} = 90°$;

$\Rightarrow \Delta CMF \backsim \Delta CAH (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CF} = \dfrac{CA}{CH} \Rightarrow CM.CH = CF.CA$.

Xét ΔCMA và ΔCFH có:

$\hat{C}$ chung;

$\dfrac{CM}{CF} = \dfrac{CA}{CH}$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \Delta CMA \backsim \Delta CFH (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CHF}$;

Lại có tứ giác $AEMF$ có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90° (GT)$ nên là hình chữ nhật, mà AM là phân giác góc $A \Rightarrow$

$AEMF$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{CAM} = 45° \Rightarrow \widehat{CHF} = 45° \Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC} - \widehat{CHF} = 90° - 45° = 45°$

$\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{AHF} \Rightarrow HF$ là tia phân giác của $\widehat{AHC}$.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

Xét ΔAEK và ΔMEB có:

$AE = ME$ ($AEMF$ là hình vuông);

$\widehat{AEK} = \widehat{MEB} = 90°$;

$\widehat{AKE} = \widehat{MBE}$ (cùng phụ với $\widehat{KAE}$);

$\Rightarrow \Delta AEK = \Delta MEB\left(cgv - gn\right)$

$\Rightarrow EK = EB \Rightarrow \Delta EBK$ vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{EBK} = 45°$

$\Rightarrow \Delta ABL$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AL$ mà $AE = AF \Rightarrow BE = FL$;

Xét ΔEBM và ΔFLM có:

$\widehat{BEM} = \widehat{LFM} = 90°$;

$ME = MF$ ($AEMF$ là hình vuông);

$BE = FL$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \Delta EBM = \Delta FLM\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow BM = LM \Rightarrow \Delta BML$ cân tại M.

3) Chứng minh $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

Ta có:

$EM//AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{MB}{BC}$ (Định lý Ta-let) $\Rightarrow BE = \frac{AB.MB}{BC}$;

$FM//AB \Rightarrow \frac{CF}{AC} = \frac{MC}{BC}$ (Định lý Ta-let) $\Rightarrow CF = \frac{AC.MC}{BC}$;

Mà AM là phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$;

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB.MB}{AC.MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (1)$$

$\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (hai tam giác vuông có góc nhọn B chung) $\Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC}$;

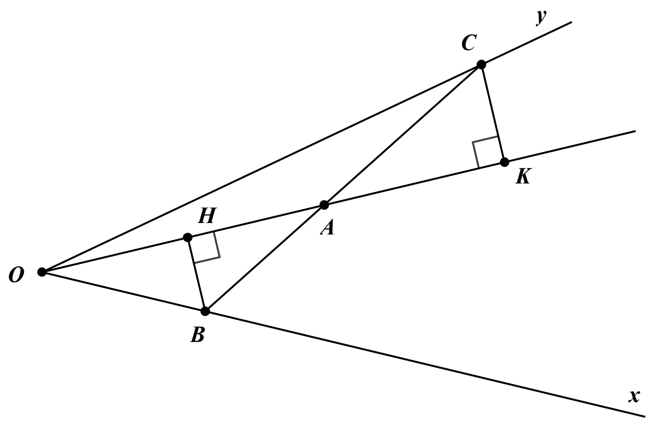
$\Delta CHA \backsim \Delta CAB$ (hai tam giác vuông có góc nhọn C chung) $\Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC}$;

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

Bài 10. Cho góc xOy nhọn và điểm A cố định nằm trong góc xOy. Đường thẳng d di động đi qua A và cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B, C. Tìm điều kiện của đường thẳng d đối với OA để $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ đạt giá trị lớn nhất.

HD :



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B và C lên OA theo quan hệ giữa đương vuông góc và đường xiên, ta có:

$AB \ge BH; AC \ge CK \Rightarrow \frac{1}{AB} \le \frac{1}{BH}; \frac{1}{AC} \le \frac{1}{CK} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \le \frac{1}{BH} + \frac{1}{CK}$.

$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ lớn nhất bằng $\frac{1}{BH} + \frac{1}{CK}$ đạt được khi $\begin{cases} BA = BH \\ CA = CK \end{cases} \Rightarrow H, A, K$ trùng nhau hay $BC \perp OA$.

Vậy $d \perp OA$ thì $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ đạt giá trị lớn nhất.