BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 7M1 – 18h00 – 21h15 – Tối thứ 2

Họ và tên: ....Ngày học: ....

CA 1

Câu 1. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số $\frac{5}{n+8};\frac{6}{n+9};\ldots;\frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

HD:

Ta có $\frac{5}{n+8}=\frac{5}{5+(n+3)}$

$\frac{6}{n+9}=\frac{6}{6+(n+3)}$

……………………

$\frac{17}{n+20}=\frac{17}{17+(n+3)}$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(n+3)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau (vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d\neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số 5; 6;....;17

Như vậy $n+3$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 17 đó là số 19

$n+3=19\Rightarrow n=16$

Vậy với $n=16$ thì các phân số $\frac{5}{n+8};\frac{6}{n+9};\ldots;\frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Câu 2. Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a) $\frac{3n+4}{n-1}$ b) $\frac{2n-9}{n-1}$ c) $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

HD:

Ta có: $\frac{3n+4}{n-1}=\frac{3n-3+7}{n-1}=3+\frac{7}{n-1}$(với $n\neq 1$)

Để $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7,n-1)=1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7,n-1)\neq 1$ thì $n-1\,\vdots\, 7$ hay $n-1=7k(k\in Z)$ do đó

$n=7k+1(k\in Z)$ nên $UCLN(7,n-1)=1$ khi $n\neq 7k+1(k\in Z)$

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1(k \in Z)$

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

Ta có: $\frac{2n-9}{n-1} = \frac{2n-2-7}{n-1} = 2 - \frac{7}{n-1}($ với $n \neq 1)$

Để $\frac{2n-9}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1 \vdots 7$ hay $n-1 = 7k(k \in Z)$ do đó $n = 7k+1(k \in Z)$ nên $UCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1(k \in Z)$

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1(k \in Z)$

c. $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

Ta có: $\frac{n^2-n-7}{n-1} = n - \frac{7}{n-1}($ với $n \neq 1)$

Để $\frac{n^2-n-7}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1 \vdots 7$ hay $n-1 = 7k(k \in Z)$ do đó $n = 7k+1(k \in Z)$ nên $UCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1(k \in Z)$

Vậy: phân số $\frac{n^2-n-7}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1(k \in Z)$

CA 2

Câu 14: Cho $x \in \{-2;-1;0;1;2;...;100\}$ và $y \in \{-89;-88;-87;...;-1;0;1\}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $x+y$.

HD:

Ta có:

$x \in \{-2;-1;0;1;2;...;100\} \Rightarrow -2 \le x \le 100$

$y \in \{-89;-88;-87;...;-1;0;1\} \Rightarrow -89 \le y \le 1$

$\Rightarrow -91 \le x+y \le 101$

$x+y=-91 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-89 \end{cases}$

$x+y=101 \Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy GTNN của $x+y$ là -91 khi $x=-2, y=-89$

GTLN của $x+y$ là 101 khi $x=100, y=1$

Câu 15: Tìm các số nguyên x sao cho:

a) $\left(x^2+5\right)\left(x^2-25\right)=0$

b) $\left(x^2-5\right)\left(x^2-25\right)<0$

HD:

a) $\left(x^2+5\right)\left(x^2-25\right)=0$

Vì $x^2 \ge 0$ nên $x^2+5 \ge 5 > 0$, do đó $\left(x^2+5\right)\left(x^2-25\right)=0 \Rightarrow x^2-25=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Vậy $x=-5$ hoặc $x=5$ thỏa mãn đề bài.

b) $\left(x^2-5\right)\left(x^2-25\right)<0 \Rightarrow x^2-5$ và x^2-25 là 2 số nguyên trái dấu.

Mà $\left(x^2-5\right)-\left(x^2-25\right)=20>0$ nên $x^2-5>0>x^2-25$,

hay $\begin{cases} x^2-5>0 \\ x^2-25<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2>5 \\ x^2<25 \end{cases} \Rightarrow 5<x^2<25 \Rightarrow x^2 \in \{9;16\}$

Nếu $x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

Nếu $x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

Vậy $x \in \{-4;-3;3;4\}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 17: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho $x^2-y^2=1998$.

HD:

Ta có $x^2-y^2=1998 \Rightarrow (x-y)(x+y)=1998$

Vì $x+y-(x-y)=2x \vdots 2$ nên $x-y$ và $x+y$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Mà $1998 \vdots 2$ nên $x-y$ và $x+y$ là hai số chẵn.

Khi đó $x-y=2m, x+y=2n\left(m,n\in\mathbb{N}\right)$.

$\Rightarrow (x-y)(x+y)=2m.2n=4mn \vdots 4$ mà $1998 \not\vdots 4 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy không tồn tại cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Viết tất cả các số nguyên từ -2022 đến 2022 theo một thứ tự bất kì. Sau đó cứ mỗi số cộng với thứ tự của nó được một tổng. Hãy tính tổng tất cả các số tổng nhận được)

HD:

Ta có các số thỏa mãn đề bài là $-2020;-2019;-2018;...;2018;2019;2020$.

Khi đó, số lượng số thỏa mãn đề bài là $2020-(-2020)+1=4041$ (số).

Gọi 4041 số lần lượt là $a_1,a_2,a_3,...,a_{4041}$ với $a_i\in\{-2020;-2019;-2018;...;2018;2019;2020\}$ và $i=1;2;...;4041$.

Khi đó, tổng cuối cùng sẽ là:

$$S=(a_1+1)+(a_2+2)+...+(a_{4041}+4041)$$
$$=(a_1+a_2+a_3+...+a_{4041})+(1+2+3+...+4041)$$

Theo tính chất giao hoán trong phép cộng, ta có:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{4041}$$
$$=(-2020)+(-2019)+(-2018)+...+2018+2019+2020$$
$$=(-2020+2020)+(-2019+2019)+(-2018+2018)+...(-3+3)+(-2+2)+(-1+1)+0$$
$$=0+0+...+0$$
$$=0$$

Do đó, $S=(a_1+a_2+a_3+...+a_{4041})+(1+2+3+...+4041)$

$$=1+2+3+...+4041$$
$$=\frac{4041.4042}{2}$$
$$=8166861$$