

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 7
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học 7AV - 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:Ngày học:

CA 1

Câu 9. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

HD:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Cách 1:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow (n+3):(n-1) \Rightarrow [(n-1)+4]:(n-1) \Rightarrow 4:(n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4.

$$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ mặt khác } n \text{ là số tự nhiên nên } n-1 \geq -1 \text{ nên } n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
	Loại	Loại	Loại	

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 2:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow 2(n+3):2n-2 \Rightarrow (2n+6):(2n-2) \Rightarrow (2n-2+8):(2n-2) \Rightarrow 8:(2n-2) \\ \Rightarrow 4:(n-1).$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4

$$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ mặt khác } n \text{ là số tự nhiên nên } n-1 \geq -1 \text{ nên } n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$ (loại)	$\frac{5}{2}$ (loại)	$\frac{3}{2}$ (loại)	1

Vậy $n = 5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Câu 10. Tìm số nguyên n sao cho:

a) $\frac{n+7}{3n-1}$ là số nguyên.

b) $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

HD:

a) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+7) : (3n-1) \Rightarrow 3(n+7) : (3n-1) \Rightarrow (3n+21) : (3n-1) \Rightarrow (3n-1+22) : (3n-1).$$

$$\Rightarrow 22 : (3n-1) \Rightarrow 3n-1 \in U(22).$$

$$U(22) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 11; \pm 22\}.$$

Ta có bảng sau:

$3n-1$	1	-1	2	-2	11	-11	22	-22
n	$\frac{2}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	0	1	$-\frac{1}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	4	$-\frac{10}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	$\frac{23}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	-7
A		-7	4		1			0

Vậy $n \in \{0; 1; 4; -7\}$ thì $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị nguyên.

b) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên thì

$$(3n+2) : (4n-5) \Rightarrow 4(3n+2) : (4n-5) \Rightarrow (12n+8) : (4n-5) \text{ hay } (12n-15+23) : (4n-5).$$

$$\Rightarrow [3(4n-5)+23] : (4n-5)$$

Mà $3(4n-5) : (4n-5)$ nên $23 : (4n-5) \Rightarrow 4n-5 \in U(23).$

$$U(23) = \{\pm 1; \pm 23\}.$$

Ta có bảng sau:

$4n-5$	1	-1	23	-23
n	$\frac{3}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	1	7	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)
A		-5 (loại vì $A \in \mathbb{N}$)	1	

Vậy $n = 7$ thì $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Câu 11. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

HD:

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì

$$(4n+5) : (2n-1) \text{ hay } (4n-2+7) : (2n-1) \Rightarrow [2(2n-1)+7] : (2n-1)$$

$$\text{Mà } 2(2n-1) : (2n-1) \Rightarrow 7 : (2n-1) \Rightarrow (2n-1) \in U(7)$$

$$U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}.$$

Ta có bảng sau:

$2n-1$	-1	1	-7	7
n	0	1	-3	4
A	-5	9	1	3

Vậy $n \in \{0; 1; -3; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên.

Câu 12. Với giá trị nào của số tự nhiên a thì :

a) $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

b) $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

HD:

Điều kiện: $a \in \mathbb{N}$

a) Để $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên thì

$$(8a+19) : (4a+1) \text{ hay } (8a+2+17) : (4a+1) \text{ hay } [2(4a+1)+17] : (4a+1)$$

$$\text{Mà } 2(4a+1) : (4a+1) \Rightarrow 17 : (4a+1) \Rightarrow (4a+1) \in U(17)$$

$$U(17) = \{\pm 1; \pm 17\}.$$

Ta có bảng sau:

$4a+1$	1	-1	17	-17
a	0	$-\frac{1}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)	4	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)
A	19		3	

Vậy $a \in \{0; 4\}$ thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên.

$$\text{b) Ta có: } \frac{5a-17}{4a-23} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4a-17}{4a-23} = \frac{5}{4} \cdot \frac{(4a-23)+4}{4a-23} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$

Để $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất thì $4a-23$ có giá trị nhỏ nhất

$$\text{Mà } a \in \mathbb{N} \text{ nên } 4a-23=1 \Rightarrow 4a=24 \Rightarrow a=6.$$

Vậy $a=6$ thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Câu 13. Tìm các số nguyên x, y sao cho $\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$.

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5-2y}{6} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5-2y}{6}$$

$$\text{Do đó: } x(5-2y) = 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Do x, y là các số nguyên nên $5-2y$ là ước của 18, mặt khác $5-2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là:

1; -1; 3; -3; 9; -9. Ta có:

$5-2y$	1	-1	3	-3	9	-9
$2y$	4	6	2	8	-4	14
y	2	3	1	4	-2	7
x	18	-18	6	-6	2	-2

Vậy có sáu cặp số x, y ở bảng trên thỏa mãn bài toán.

CA 2

Câu 11. So sánh $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$ với $\frac{1}{2}$

HD:

$$\text{Ta có: } 3A = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$\text{Suy ra } 3A - A = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$2A = 1 - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} < \frac{1}{2}$$

Câu 12. Chứng minh rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

HD:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } & \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ & = \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & = \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ & = \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Câu 13. Chứng minh $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

HD:

$$\text{Ta có: } 3A = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} \right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{99}}$$

$$\text{Suy ra } 3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{99}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}\right)$$

$$2A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + 1 - \frac{100}{3^{100}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$\text{Suy ra } 3B - B = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot B < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3^{100}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Câu 14. Chứng minh $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$.

HD:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7^2} \right) < \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{7} \right) < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 15. Cho tổng $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

HD:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right) \\ \Rightarrow S &< \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) \end{aligned}$$

$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$$

$$\text{suy ra } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

$$\text{Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$\Rightarrow S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60}$$

$$S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60}$$

$$S > \frac{3}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.