BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THI CHUYÊN
ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 8M – 18h00 – 21h15 – Tối thứ 3

Họ và tên: .....**Ngày học:** .....

ĐẠI SỐ

Câu 1. Cho x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $S=(x-1)^{2023}+y^{2024}+(z+1)^{2025}$

HD:

$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2$

$\Rightarrow x=y=z=0$

$\Rightarrow S=-1^{2023}+0^{2024}+1^{2025}=0$

Câu 2. Rút gọn biểu thức: $N=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

HD:

Quy đồng hai phân số đầu tiên:

$N=\frac{2}{(1-x)(1+x)}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$

Tương tự ghép cặp các phân số đầu tiên

$N=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}$

Câu 3. Cho $a>b>0$, biết $3a^2+3b^2=10ab$. Tính $P=\frac{a-b}{a+b}$.

HD:

Ta có $a>b>0$ nên $P>0$.

Ta có $P^2=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}$.

Ta có $3a^2+3b^2=10ab$ nên $3(a^2+b^2)=10ab\Rightarrow a^2+b^2=\frac{10}{3}ab$.

Suy ra $P^2=\dfrac{\dfrac{10}{3}ab-2ab}{\dfrac{10}{3}ab+2ab}=\dfrac{\dfrac{4}{3}ab}{\dfrac{16}{3}ab}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow P=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị của biểu thức P là $\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho $a+b+c=0(a\neq 0;b\neq 0;c\neq 0)$. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{a^2}{cb}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$.

HD:

$$A=\frac{a^2}{cb}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Ta có

$$a+b+c=0$$
$$\Rightarrow a+b=-c$$
$$\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

Suy ra $A=\dfrac{3abc}{abc}=3$.

Câu 5. Tìm x thỏa mãn: $27x^3+(x-5)^3+64=(4x-1)^3$

HD:

$$27x^3+(x-5)^3+64=(4x-1)^3\Rightarrow (3x)^3+(x-5)^3+4^3=(4x-1)^3$$

Để ý: $3x+(x-5)+4=4x-1$. Như vậy ta được:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3\Rightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

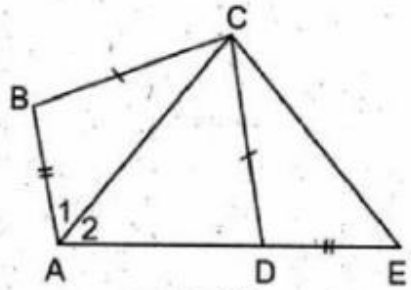
$$\left[\begin{array}{l}a+b=4x-5=0\\b+c=x-1=0\\c+a=3x+4=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{4}\\x=1\\x=\dfrac{-4}{3}\end{array}\right.$$

HÌNH HỌC

Câu 1. Tứ giác $ABCD$ có $B+D=180^\circ, CB=CD$. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của góc A.

HD:

Giải : (h.5) Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE = AB. Ta có $\hat{B} + \widehat{ADC} = 180^\circ$, $\widehat{EDC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ nên $\hat{B} = \widehat{EDC}$.



Hình 5

$\Delta ABC = \Delta EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}$ (1)

$AC = EC$.

Tam giác CAE có AC = EC nên là tam giác cân, do đó

$\hat{A}_2 = \hat{E}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AC là tia phân giác của góc A.

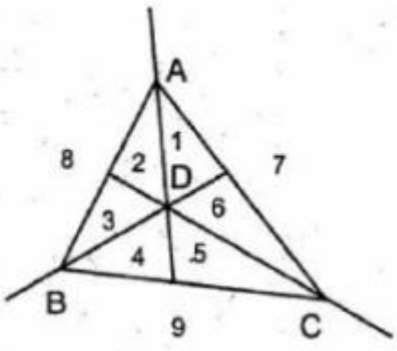
Câu 2. Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có bà điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

HD:

Xét bốn điểm A, B, C, D. Nếu bốn điểm đó là đỉnh của một tứ giác lồi thì bài toán được chứng minh xong. Nếu bốn điểm đó không là đỉnh của một tứ giác lồi thì tồn tại một điểm (giả sử D) nằm trong tam giác có đỉnh là

ba điểm còn lại (h.54). Chia mặt phẳng thành chín miền như hình vẽ, điểm thứ năm E nằm bên trong một miền (vì trong năm điểm không có ba điểm thẳng hàng).

Nếu E thuộc các miền 1, 4, 8, ta chọn bốn điểm là E và A, D, B. Nếu E thuộc các miền 2, 5, 7, ta chọn E và A, D, C. Nếu E thuộc các miền 3, 6, 9 ta chọn E và B, D, C.



Hình 54