

**GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC TỪ  $0^\circ$  ĐẾN  $180^\circ$**   
**ĐỊNH LÝ SIN VÀ COSIN – GIẢI TAM GIÁC**

**A. Lí thuyết cần nhớ**

**1. Giá trị lượng giác của các góc từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$**

\* **Giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ).**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha (\alpha \neq 0^\circ); \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ)$$

\* **Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ )**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ); \quad \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ).$$

\* **Một số đẳng thức lượng giác**

$$+ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$+ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Câu 1.** Tính  $\sin 120^\circ, \cos 120^\circ; \sin 135^\circ, \cos 135^\circ$ .

**Câu 2.** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

**HD:**

$$\begin{aligned} T &= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1 \\ &= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1. \end{aligned}$$

**Câu 3.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \sin 13^\circ \cdot \cos 131^\circ + \sin 167^\circ \cdot \cos 49^\circ$ ;

b)  $B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot \cot 125^\circ \cdot \cot 155^\circ$ .

**HD:**

a) Ta có:

$$\cos 131^\circ = \cos(180^\circ - 49^\circ) = -\cos 49^\circ, \sin 167^\circ = \sin(180^\circ - 13^\circ) = \sin 13^\circ.$$

$$\text{Do đó, } A = -\sin 13^\circ \cdot \cos 49^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 49^\circ = 0.$$

b) Ta có:  $\cot 125^\circ = -\cot(180^\circ - 125^\circ) = -\cot 55^\circ = -\tan(90^\circ - 55^\circ) = -\tan 35^\circ,$

$$\cot 155^\circ = -\cot(180^\circ - 155^\circ) = -\cot 25^\circ = -\tan(90^\circ - 25^\circ) = -\tan 65^\circ.$$

$$\text{Do đó, } B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot (-\tan 35^\circ) \cdot (-\tan 65^\circ)$$

$$= (-\tan 35^\circ \cdot \cot 35^\circ) \cdot (-\tan 65^\circ \cdot \cot 65^\circ) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

**Câu 4.** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

a)  $\sin A = \sin(B + C);$

b)  $\cos A + \cos(B + C) = 0;$

c)  $\tan A + \tan(B + C) = 0 (A \neq 90^\circ);$

d)  $\cot A + \cot(B + C) = 0.$

HD:

Ta có:  $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ - A$ . Do đó:

a)  $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A.$

b)  $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A + \cos(B + C) = 0.$

c)  $\tan(B + C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A \Rightarrow \tan A + \tan(B + C) = 0.$

d)  $\cot(B + C) = \cot(180^\circ - A) = -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot(B + C) = 0.$

## 2. Định lí sin và cos trong tam giác

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC=a, CA=b, AB=c$ . Khi đó:

$$+ \text{Định lí sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

+ Định lí cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $BC = a; AC = b; AB = c$  và thỏa mãn hệ thức

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc. \text{ Chứng minh rằng: } \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

HD:

Theo định lý cosin ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Mà:  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

Do đó:  $\cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = 120^\circ.$

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 9\text{cm}, BC = 12\text{cm}$  và góc  $\hat{B} = 60^\circ$ , tính  $AC$

HD:

Áp dụng định lý Cô-Sin ta có  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = 3\sqrt{13}$ .

**Câu 7.** Cho tam giác ABC có  $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $AC=b$  biết:

a)  $\hat{A} = 50^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $b = 4$ . Tính cạnh  $a$  và  $c$ .

b)  $\hat{C} = 30^\circ$ ,  $c = 5$ . Tính  $R$ .

HD:

Áp dụng định lý sin

$$\text{a) Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4 \sin 50^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4,3$$

Mặt khác

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{4 \sin 85^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5,6$$

$$\text{b) Ta có } R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{5}{2 \sin 30^\circ} = 5.$$

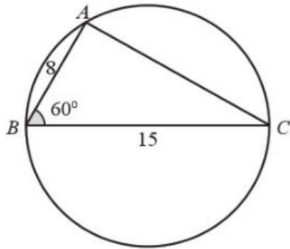
**Câu 8.** Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$  và  $AB = 5$ , tính  $AC$

HD:

$$\text{Áp dụng định lý sin ta có: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \sin B}{\sin C} = \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 9.** Từ một tấm bia hình tròn, bạn An cắt ra được một hình tam giác có các cạnh  $AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = 15\text{cm}$  và góc  $B = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AC$  và bán kính  $R$  của miếng bia.



HD:

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \\ = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 169.$$

Suy ra  $AC = \sqrt{169} = 13$  (cm).

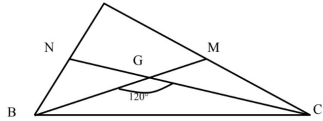
Áp dụng định lý sin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R.$$

$$\text{Suy ra } R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{13}{2 \sin 60^\circ} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$  có hai trung tuyến  $BM$  và  $CN$  hợp với nhau một góc  $120^\circ$ , biết  $BM = 12$ ,  $CN = 15$ . Tính độ dài các cạnh của tam giác

HD:



Gọi  $BM \cap CN = \{G\} \Rightarrow G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

$$\Rightarrow GB = \frac{2}{3}BM = 8, GC = \frac{2}{3}CN = 10 \Rightarrow GM = 4, GN = 5.$$

Áp dụng định lý cos trong tam giác  $GBC$  có:

$$BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB \cdot GC \cdot \cos 120^\circ = 244 \Rightarrow BC = 2\sqrt{61}.$$

**Cách 2:** Ta có:  $BGN = 180^\circ - BGC = 60^\circ$ ,  $MGC = 180^\circ - BGC = 60^\circ$ .

Áp dụng định lý cos, ta được:

$$BN^2 = GB^2 + GN^2 - 2GB \cdot GN \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow BN = 7 \Rightarrow AB = 2BN = 14.$$

$$MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM \cdot GC \cdot \cos 60^\circ = 76 \Rightarrow MC = 2\sqrt{19} \Rightarrow AC = 2MC = 4\sqrt{19}.$$

**Câu 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính độ dài các đường chéo  $AC$ ,  $BD$ .

HD:

Ta có:  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

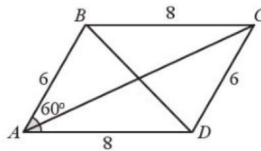
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} \\ = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 148.$$

$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}.$$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABD$  ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 52.$$

$$\text{Suy ra } BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$



Hình 5

**BTVN**

**Câu 1.** Tính  $P = \frac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\cos 100^\circ \cos 140^\circ \cos 160^\circ}$  (không dùng máy tính)

HD:

$$\cos 20^\circ = \cos(180^\circ - 160^\circ) = -\cos 160^\circ$$

$$\cos 40^\circ = \cos(180^\circ - 140^\circ) = -\cos 140^\circ$$

$$\cos 80^\circ = \cos(180^\circ - 100^\circ) = -\cos 100^\circ$$

$$\Rightarrow P = \frac{(-\cos 160^\circ)(-\cos 140^\circ)(-\cos 100^\circ)}{\cos 100^\circ \cos 140^\circ \cos 160^\circ} = -1.$$

**Câu 2.** Cho  $P = \frac{\cos 15^\circ \cos 42^\circ \cos 86^\circ \sin 15^\circ \sin 42^\circ \sin 86^\circ}{\cos 75^\circ \cos 48^\circ \cos 4^\circ \sin 75^\circ \sin 48^\circ \sin 4^\circ}$ , tính giá trị của biểu thức  $P^{10} - P$ .

HD:

$$\text{Ta có: } \cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ; \quad \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ.$$

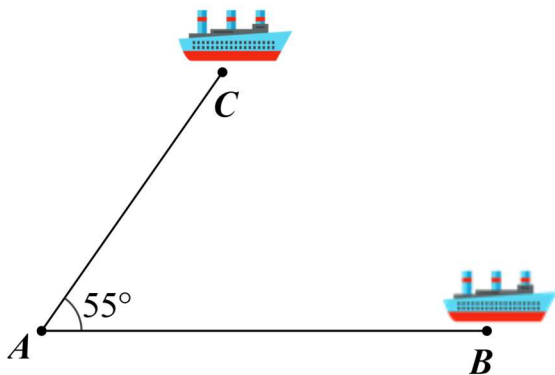
$$\cos 42^\circ = \cos(90^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ; \quad \sin 42^\circ = \sin(90^\circ - 48^\circ) = \cos 48^\circ.$$

$$\cos 86^\circ = \cos(90^\circ - 4^\circ) = \sin 4^\circ; \quad \sin 86^\circ = \sin(90^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ.$$

$$P = \frac{\cos 15^\circ \cos 42^\circ \cos 86^\circ \sin 15^\circ \sin 42^\circ \sin 86^\circ}{\cos 75^\circ \cos 48^\circ \cos 4^\circ \sin 75^\circ \sin 48^\circ \sin 4^\circ}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sin 75^\circ \sin 48^\circ \sin 4^\circ \sin 15^\circ \sin 42^\circ \sin 86^\circ}{\sin 15^\circ \sin 42^\circ \sin 86^\circ \sin 75^\circ \sin 48^\circ \sin 4^\circ} = 1 \Rightarrow P^{10} - P = 0.$$

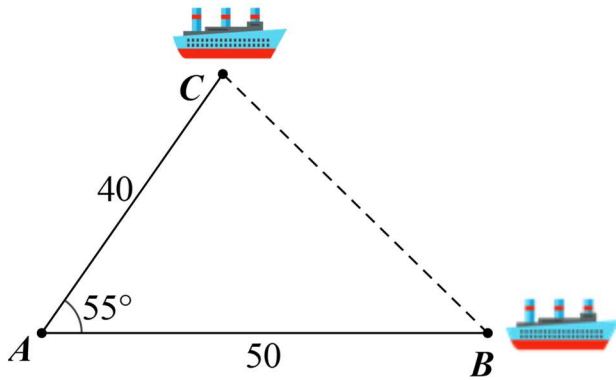
**Câu 3.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc  $55^\circ$ . Tàu  $B$  chạy với vận tốc 25 hải lí một giờ. Tàu  $C$  chạy với vận tốc 20 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



HD:

Sau 2 giờ, tàu  $B$  đi được:  $25 \cdot 2 = 50$  (hải lí); tàu  $C$  đi được:  $20 \cdot 2 = 40$  (hải lí).

Vậy  $\triangle ABC$  có  $AB = 50$ ,  $AC = 40$ ,  $\widehat{A} = 55^\circ$ .



Áp dụng định lí côsin vào  $\triangle ABC$ , ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A}$$

$$= \sqrt{50^2 + 40^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40 \cdot \cos 55^\circ}$$

$$\approx 42,5 \text{ (hải lí)}$$

Vậy sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 42,5 hải lí.