TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 8. Giải phương trình: $3x^2+3x=(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+2$

HD:

Điều kiện $x\ge 0$ hoặc $x\le -3$. Ta có:

$$x^2+3x-(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+2x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-(3x-1)\sqrt{x^2+3x}+(2x-2)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+3x}-(2x-2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+3x}-(x+1)\right]=0$$

TH1: $\sqrt{x^2+3x}=2x-2$ (ĐK $x\ge 1$)

$$\Leftrightarrow x^2+3x=4x^2-8x+4$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-11x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}\sqrt{73}+\frac{11}{6}$$

TH2: $\sqrt{x^2+3x}=x+1$ (ĐK $x\ge 0$)

$$\Leftrightarrow x^2+3x=x^2+2x+1$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Câu 13. Giải phương trình $3x+5+\sqrt{x-1}=4\sqrt{3x+1}$.

HD:

ĐKXĐ: $x\ge 1$

$$3x+5+\sqrt{x-1}=4\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow(3x+1)-4\sqrt{3x+1}+4+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0$$

Mà $\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2\ge 0\ \forall x\ge 1$

$\sqrt{x-1}\ge 0\quad \forall x\ge 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1}=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1(TM)$$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Bài tập về nhà

Câu 1. Cho a,b,x,y là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{1}{a+b} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^{10}}{a^5}+\frac{y^{10}}{b^5}=\frac{2}{(a+b)^5}.$$

HD:

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b}=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{a+b}.$$

$$\Rightarrow (a+b)\frac{x^4}{a}+(a+b)\frac{y^4}{b}=x^4+2x^2y^2+y^4 \Leftrightarrow x^4+\frac{b}{a}x^4+y^4+\frac{a}{b}y^4=x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{ab}x^4+\frac{a^2}{ab}y^4=2x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4+a^2y^4=2abx^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(bx^2-ay^2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow bx^2=ay^2$$

Suy ra: $\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$ $(*)$.

Áp dụng kết quả $(*)$, ta có:

$$\frac{x^{10}}{a^5}=\left(\frac{x^2}{a}\right)^5=\left(\frac{1}{a+b}\right)^5=\frac{1}{(a+b)^5}$$

$$\frac{y^{10}}{b^5}=\left(\frac{y^2}{b}\right)^5=\left(\frac{1}{a+b}\right)^5=\frac{1}{(a+b)^5}$$

Do đó: $\dfrac{x^{10}}{a^5}+\dfrac{y^{10}}{b^5}=\dfrac{1}{(a+b)^5}+\dfrac{1}{(a+b)^5}=\dfrac{2}{(a+b)^5}$.

Câu 2. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$.

HD:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \ (*)$

Ta có:

$(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+2x-3+2x-2 \ (1)$

Đặt $t=\sqrt{5x^2+2x-3},\ (t\ge 0)$.

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-(x+1)t+2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{5} \end{array}\right. (\text{t/m}(*))$

Với $t=x-1 \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x\ge 1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1, x=-\dfrac{7}{5}$.

Câu 3. Cho $\mathrm{x,y,z,t}$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn: $\mathrm{x^2+y^2+z^2+t^2=2023}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{x}}{2023\sqrt{2023}+\mathrm{yzt}}+\frac{\mathrm{y}}{2023\sqrt{2023}+\mathrm{xzt}}+\frac{\mathrm{z}}{2023\sqrt{2023}+\mathrm{txy}}+\frac{\mathrm{t}}{2023\sqrt{2023}+\mathrm{xyz}}.$$

HD:

Đặt $a=\dfrac{x}{\sqrt{2023}};b=\dfrac{y}{\sqrt{2023}};c=\dfrac{z}{\sqrt{2023}};d=\dfrac{t}{\sqrt{2023}}$.

Khi đó có $\begin{cases} a,b,c,d\ge 0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=1 \end{cases}$.

$F=\dfrac{1}{2023}\left(\dfrac{a}{1+bcd}+\dfrac{b}{1+acd}+\dfrac{c}{1+abd}+\dfrac{d}{1+abc}\right)$.

Chỉ ra được:

$F \ge \frac{1}{2023} \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+4abcd}$.

Nhận xét: $0 \le a,b,c,d \le 1$, suy ra $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge 0$. Hay

$$Q = 1 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - (a+b+c+d) - 4abcd$$
$$\ge (ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 5abcd + (abc+abd+acd+bcd)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \ge 6\sqrt[6]{(abcd)^3} = 6\sqrt{abcd}$$

Ngoài ra $abc+abd+bcd+acd \ge 0$

Suy ra $Q \ge 6\sqrt{abcd} - 5abcd = 5\left(\sqrt{abcd} - abcd\right) + \sqrt{abcd} \ge 0, \forall a,b,c,d \in [0;1]$.

Do $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ nên $Q = (a+b+c+d)^2 - (a+b+c+d+4abcd) \ge 0$ suy ra

$$(a+b+c+d)^2 \ge (a+b+c+d+4abcd)$$

Từ đó $F \ge \frac{1}{2023}$.

Dấu bằng xảy ra khi:

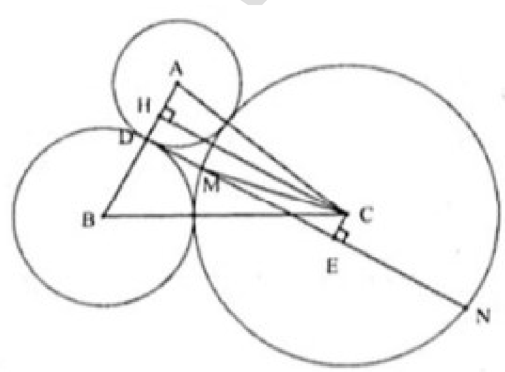
$\Leftrightarrow a=b=c=0; d=1$ và các hoán vị hay $x=y=z=0, t=\sqrt{2023}$ và các hoán vị.

Vậy GTNN của F bằng $\frac{1}{2023}$.

HÌNH HỌC

Câu 6. Cho ba đường tròn $(A;a),(B;b),(C;c)$ tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm D của đường tròn $(A;a)$ và $(B;b)$, kẻ tiếp tuyến chung cát đường tròn $(C;c)$ tại M và N. Tính MN theo a,b,c.

HD:



Kẻ $CH \perp AB$,

$CE \perp MN \Rightarrow MN = 2ME$,

$ME^2 = CM^2 - CE^2 = c^2 - CE^2$

DECH là hình chữ nhật $\Rightarrow CE = DH$.

Theo định lí Pythagor cho $\triangle CAH$ và $\triangle CBH$:

$AC^2 - AH^2 = CB^2 - BH^2$

$\Rightarrow (a+c)^2 - (a-DH)^2 = (b+c)^2 - (b+DH)^2$

$\Rightarrow (b+DH)^2 - (a-DH)^2 = (b+c)^2 - (a+c)^2$

$\Rightarrow DH = \dfrac{c(b-a)}{a+b}$

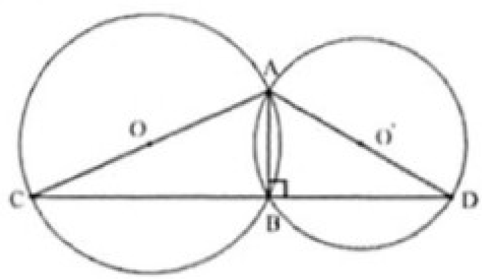
$\Rightarrow M^2 = c^2 - \dfrac{c^2(b-a)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{4c^2ab}{(a+b)^2}$

$\Rightarrow ME = \dfrac{2c\sqrt{ab}}{a+b}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{4c\sqrt{ab}}{a+b}$.

Câu 9. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')(R > R')$ cắt nhau tại A và B. Kẻ đường kính AC và đường kính AD. Tính độ dài BC, BD biết $CD = a$.

HD:



Đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ có AC, AD là đường kính

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$

$\Rightarrow C, B, D$ thẳng hàng

$\Rightarrow CD = a = CB + BD.$

Theo định lí Pythagor cho $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$:

$\Rightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$

$\Rightarrow 4R^2 - BC^2 = 4R'^2 - (a - BC)^2$

$\Rightarrow 2aBC = 4R^2 - 4R'^2 + a^2$

$\Rightarrow BC = \dfrac{4R^2 - 4R'^2 + a^2}{2a}$

$\Rightarrow BD = a - BC = \dfrac{a^2 - 4R^2 + 4R'^2}{2a}.$