TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 1. Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{x^4}{a} + \dfrac{y^4}{b} = \dfrac{1}{a+b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$\dfrac{x^{10}}{a^5} + \dfrac{y^{10}}{b^5} = \dfrac{2}{(a+b)^5}$.

HD:

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{a+b}.$$

$$\Rightarrow (a+b)\frac{x^4}{a} + (a+b)\frac{y^4}{b} = x^4+2x^2y^2+y^4 \Leftrightarrow x^4 + \frac{b}{a}x^4 + y^4 + \frac{a}{b}y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{ab}x^4 + \frac{a^2}{ab}y^4 = 2x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 = 2abx^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(bx^2 - ay^2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow bx^2 = ay^2$$

Suy ra: $\dfrac{x^2}{a} = \dfrac{y^2}{b} = \dfrac{x^2+y^2}{a+b} = \dfrac{1}{a+b}$ $(*)$.

Áp dụng kết quả $(*)$, ta có:

$$\frac{x^{10}}{a^5} = \left(\frac{x^2}{a}\right)^5 = \left(\frac{1}{a+b}\right)^5 = \frac{1}{(a+b)^5}$$

$$\frac{y^{10}}{b^5} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^5 = \left(\frac{1}{a+b}\right)^5 = \frac{1}{(a+b)^5}$$

Do đó: $\dfrac{x^{10}}{a^5} + \dfrac{y^{10}}{b^5} = \dfrac{1}{(a+b)^5} + \dfrac{1}{(a+b)^5} = \dfrac{2}{(a+b)^5}$.

Câu 2. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$.

HD:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$ $(*)$

Ta có:

$$(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+2x-3+2x-2\ (1)$$

Đặt $t=\sqrt{5x^2+2x-3},\ (t\ge 0)$.

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-(x+1)t+2x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$$

Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{5} \end{array}\right. (\text{t/m}(*))$

Với $t=x-1 \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x\ge 1 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1, x=-\dfrac{7}{5}$.

Câu 3. Cho x,y,z,t là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2+t^2=2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{x}{2023\sqrt{2023}+yzt}+\frac{y}{2023\sqrt{2023}+xzt}+\frac{z}{2023\sqrt{2023}+txy}+\frac{t}{2023\sqrt{2023}+xyz}.$$

HD:

Đặt $a=\dfrac{x}{\sqrt{2023}};b=\dfrac{y}{\sqrt{2023}};c=\dfrac{z}{\sqrt{2023}};d=\dfrac{t}{\sqrt{2023}}$.

Khi đó có $\begin{cases} a,b,c,d\ge 0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=1 \end{cases}$. $F=\dfrac{1}{2023}\left(\dfrac{a}{1+bcd}+\dfrac{b}{1+acd}+\dfrac{c}{1+abd}+\dfrac{d}{1+abc}\right)$.

Chỉ ra được:

$F \ge \frac{1}{2023} \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+4abcd}$.

Nhận xét: $0 \le a,b,c,d \le 1$, suy ra $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge 0$. Hay

$$Q = 1 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - (a+b+c+d) - 4abcd$$
$$\ge (ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 5abcd + (abc+abd+acd+bcd)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \ge 6\sqrt[6]{(abcd)^3} = 6\sqrt{abcd}$$

Ngoài ra $abc+abd+bcd+acd \ge 0$

Suy ra $Q \ge 6\sqrt{abcd} - 5abcd = 5\left(\sqrt{abcd} - abcd\right) + \sqrt{abcd} \ge 0, \forall a,b,c,d \in [0;1]$.

Do $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ nên $Q = (a+b+c+d)^2 - (a+b+c+d+4abcd) \ge 0$ suy ra

$$(a+b+c+d)^2 \ge (a+b+c+d+4abcd)$$

Từ đó $F \ge \frac{1}{2023}$.

Dấu bằng xảy ra khi:

$\Leftrightarrow a=b=c=0; d=1$ và các hoán vị hay $x=y=z=0, t=\sqrt{2023}$ và các hoán vị.

Vậy GTNN của F bằng $\frac{1}{2023}$.

HÌNH HỌC

Câu 7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác :

b) $d^2=R^2-2Rr$ (Hệ thức Euler) r, R là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác và d là khoảng cách giữa tâm đường tròn.

HD:

b) (h.7-11) Theo Ví dụ 6 $\Rightarrow IA.IM = R^2 \quad d^2$ (1)

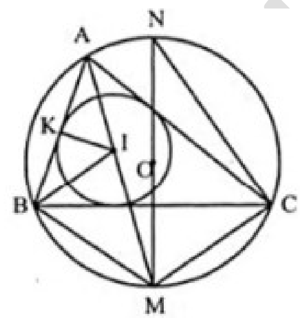
AM là phân giác góc A $\Rightarrow MB = MC = MI$. Kẻ đường kính MN, ta có

$\widehat{NCM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2}\widehat{A}$.

ΔIAK và ΔMNC là hai tam giác vuông có góc nhọn bằng nhau nên đồng dạng $\Rightarrow \frac{IA}{MN} = \frac{IK}{MC} \Rightarrow$

$IA.MC = MN.IK \Rightarrow IA.IM = 2R.r$.

Từ (1) suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$.



Hình 7-11

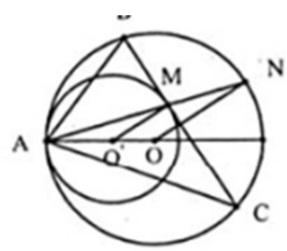
Từ kết quả trên suy ra trong mọi tam giác có $R \geq 2r$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác đó là tam giác đều.

Câu 8. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ tiếp xúc trong tại $A (R > r)$. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $(O;r)$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại B và C. Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc BAC.

HD:

Giải. (h.7-12) Đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong tại A

$\Rightarrow$ A, O, O' thẳng hàng ; AM cắt đường tròn $(O; R)$ tại N $\Rightarrow \Delta O'AM$ và ΔOAN là hai tam giác cân, có góc $\widehat{OAN}$ chung $\Rightarrow \widehat{AMO'} = \widehat{ANO}$ $\Rightarrow O'M // ON$;



Hình 7-12

BC tiếp xúc với đường tròn $(O'; r)$ tại M

$\Rightarrow O'M \perp BC \Rightarrow ON \perp BC \Rightarrow \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{NC} \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{NAC} \Rightarrow$ AN là tia phân giác của góc BAC.