TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 6

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

CA 1

Câu 13. Số 2^{100} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số.

HD:

Ta có: $10^{30} = 1000^{10}$ và $2^{100} = 1024^{10} \Rightarrow 10^{30} < 2^{100}$ (1)

Lại có $2^{100} = 2^{31}.2^{63}.2^{6} = 2^{31}.512^{7}.64$ và $10^{31} = 2^{31}.5^{28}.5^{3} = 2^{31}.625^{7}.125$

Nên $2^{100} < 10^{31}$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra số 2^{100} viết trong hệ thập phân có 31 chữ số.

Bài tập về nhà

Câu 1. Tìm các số tự nhiên x, y , n biết rằng :

a) $4^{11} . 25^{11} \le 2^{n}. 5^{n} \le 20^{12}.5^{12}$

b) $2^{x+1} . 3^{y} = 12^{x}$

HD:

a) $10^{22} \le 10^{n} \le 100^{24}$. Vậy n: 22; 23; 24

b) $2^{x+1} . 3^{y} = 12^{x}$

$2^{x+1} . 3^{y} = 2^{2x}.3^{x}$

$\Rightarrow \dfrac{3^{y}}{3^{x}} = \dfrac{2^{2x}}{2^{x+1}}$

$3^{y-x} = 2^{x+1}$

=> y-x = x-1 = 0

Hay x = y = 1

Câu 2. Rút gọn

a) $2^5\left(2^6+2^3\right)-2^4\left(2^7+2^4\right)$ b) $\dfrac{2^{10}.1024-2^{13}.4}{2^{15}}$

HD:

a) $2^5\left(2^6+2^3\right)-2^4\left(2^7+2^4\right)=\left(2^{11}+2^8\right)-\left(2^{11}+2^8\right)=0$

b) $\dfrac{2^{10}.1024-2^{13}.4}{2^{15}}=\dfrac{2^{10}.2^{10}-2^{13}.2^2}{2^{15}}=\dfrac{2^{20}-2^{15}}{2^{15}}=\dfrac{2^{15+5}-2^{15}}{2^{15}}=\dfrac{2^{15}.2^5-2^{15}}{2^{15}}=\dfrac{2^{15}\left(2^5-1\right)}{2^{15}}=31$

Câu 3.

a) Rút gọn: $B=7^{101}-7^{100}+7^{99}-7^{98}+...+7-1$

b) Rút gọn: $C=10^{100}-10^{98}+10^{96}-10^{94}+...+10^{2}-1$

HD:

a)

$B=7^{101}-7^{100}+7^{99}-7^{98}+...+7-1$

$7B=7^{102}-7^{101}+7^{100}-7^{99}+...+7^{2}-7$

$7B+B=8B=7^{102}-1$

$B=\dfrac{7^{102}-1}{8}$

b)

$C=10^{100}-10^{98}+10^{96}-10^{94}+...+10^{2}-1$

$100C=10^{102}-10^{100}+10^{98}-10^{96}+...+10^{4}-10^{2}$

$101C=10^{102}-1$

$C=\dfrac{10^{102}-1}{101}$

Câu 4. Cho $A=1+4+4^2+\ldots+4^{101}$

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 7

b) Tìm số dư của A khi chia cho 20

HD:

a) $A=1+4+4^2+\ldots+4^{101}=\left(1+4+4^2\right)+4^3\left(1+4+4^2\right)+...+4^{99}\left(1+4+4^2\right)=21.K\,\vdots\,21$

b) $A=1+4+4^2+\ldots+4^{101}=1+4+4\left(4+4^2\right)+4^3\left(4+4^2\right)+...+4^{99}\left(4+4^2\right)=20m+5$

A chia 20 dư 5

Câu 5. Cho $B=1+5^2+5^4+\ldots+5^{98}$

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 13

b) Tìm số dư của A khi chia cho 31

HD:

a) $B=1+5^2+5^4+\ldots+5^{98}=\left(1+5^2\right)+5^4\left(1+5^2\right)+...+5^{96}\left(1+5^2\right)=26k\,\vdots\,13$

b) $B=1+5^2+5^4+\ldots+5^{98}=1+5^2+5^4\left(1+5^2+5^4\right)+5^{10}\left(1+5^2+5^4\right)+...+5^{94}\left(1+5^2+5^4\right)$

B = 31k + 26 nên B chia 31 dư 26

Câu 6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$ thì $1992^n+3.2^n$ có cùng số chữ số.

HD:

Giả sử 1992^n có k chữ số. Tức là $10^{k-1} \le 1992^n \le 10^k$. Do $10^k > 1992^n > 10^{3n}$ nên $k > 3n$.

Giả sử $1992^n + 3.2^n$ chứa ít nhất $k+1$ chữ số. Thế thì:

$1992^n + 3.2n \ge 10^k > 1992^n \Rightarrow 996^n + 3 \ge 2^{k-n}.5^k > 996^n$, suy ra $996^n + a = 2^k - n$ ở đó $1 \le a \le 3$.

+ Nếu $n = 1$ thì 1992 và $1992 + 3 \times 2 = 1998$ có cùng số chữ số.

+ Nếu $n \ge 2$ thì $k - n > 2n \ge 4$, suy ra $2^{k-n} \cdot 5^n \vdots 10$, suy $996^n + a$ chia hết cho 10. Nhưng mặt khác $996^n + a$ và 6 + a có cùng số dư khi chia cho 10. Vì $1 \le a \le 3$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $1992^n + 3.2^n$ và 1992^n có cùng số chữ số.

Câu 7. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 để $\left(2021^n - 1\right) \vdots 3^{2021}$

HD:

Đặt $3^{2021} = m$.

Xét các số: 2021^n; 2021^2; … 2021^{m+1}. Ta thấy m + 1 số này khi chia cho m chỉ nhận m số dư, do đó chắc chắn sẽ có ít nhất 2 số trong đó có cùng số dư khi chia cho m.

Giả sử 2 số đó là: 2021^a và 2021^b với a < b. Suy ra: $2021^b - 2021^a \vdots m \Rightarrow 2021^a\left(2021^{b-a} - 1\right) \vdots m$

Nhưng 2021^a và $3^{2021} = m$ nguyên tố cùng nhau nên $2021^{b-a} - 1 \vdots m$. Vậy tồn tại số tự nhiên n khác 0 để $\left(2021^n - 1\right) \vdots 3^{2021}$

Câu 8. Viết số 4321^{1234} dưới dạng tổng của một số số nguyên dương. Gọi T là tổng các lập phương của tất cả các số đó. Tìm số dư của T trong phép chia cho 6.

HD:

Ta có:

$$4321^{1234} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$T = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3$$

Xét hiệu $T - 4321^{1234} = \left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3\right) - \left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right)$

$$T - 4321^{1234} = \left(a_1^3 - a_1\right) + \left(a_2^3 - a_2\right) + \left(a_3^3 - a_3\right) + ... + \left(a_n^3 - a_n\right)$$

Theo câu a ta có $a_1^3 - a_1 \vdots 6, a_2^3 - a_2 \vdots 6, a_3^3 - a_3 \vdots 6, ... a_n^3 - a_n \vdots 6,$ nên $T - 4321^{1234} \vdots 6$

Suy ra T và 4321^{1234} cùng dư khi chia cho 6

Mặt khác 4321 chi 6 dư 1 nên 4321^{1234} chia cho 6 cũng dư 1. Vậy T chia 6 dư 1

CA 2

Câu 1. Tìm các số tự nhiên n sao cho

a) $3n+1 \vdots n$ b) $3n+1 \vdots n-1$

HD:

a) $3n+1 \vdots n \Rightarrow 1 \vdots n \Rightarrow n=1$

f) $3n+1 \vdots n-1 \Rightarrow 3(n-1)+4 \vdots n-1 \Rightarrow 4 \vdots n-1 \Rightarrow n-1 \in Ư(4)=\{1;2;4\}$

Vậy $n \in \{2;3;5\}$

Câu 2. Chứng minh rằng: $A=2+2^2+2^3+...+2^{2020}$ chia hết cho 15

HD:

$A=2+2^2+2^3+...+2^{2020}$

$=\left(2+2^2+2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6+2^7+2^8\right)+...+\left(2^{2017}+2^{2018}+2^{2019}+2^{2020}\right)$

$=2\left(1+2+2^2+2^3\right)+2^5\left(1+2+2^2+2^3\right)+...+2^{2017}\left(1+2+2^2+2^3\right)$

$=\left(1+2+2^2+2^3\right)\left(2+2^5+...+2^{2017}\right)$

$=15\left(2+2^5+...+2^{2017}\right) \vdots 15$