TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VÉC TƠ (tiếp)

Câu 16. Cho hình binh hành ABCD. Lấy các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

HD:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-3}{10}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{-1}{5}\vec{a}+\frac{2}{15}\vec{b}.$$

Suy ra $\overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{10}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$. Vậy M, N, P thẳng hàng.

Câu 17. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, M, N thoả mãn $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AM}$ với k là số thực. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EN}$ theo các vectơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ và tìm k để ba điểm D, E, N thẳng hàng.

HD:

$$\overrightarrow{AN}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=k\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AN}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{5k-6}{15}\vec{b}.$$

Ba điểm phân biệt D, E, N thẳng hàng khi và chỉ khi có số thực t thoả mãn

$$\overrightarrow{EN}=t\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{5k-6}{15}\vec{b}=t\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2k}{3}+\frac{t}{3}\right)\vec{a}=-\left(\frac{5k-6}{15}-\frac{2t}{5}\right)\vec{b}.$$

Vì $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương nên $\frac{2k}{3}+\frac{t}{3}=\frac{5k-6}{15}-\frac{2t}{5}=0.$

Suy ra $k=\frac{6}{17}$.

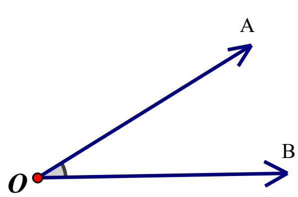
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ

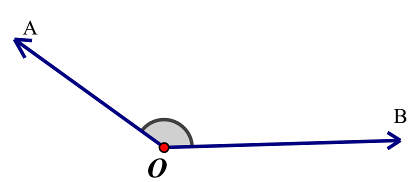
1. Tích vô hướng của hai véc tơ có cùng điểm đầu.

* ***Góc giữa hai véc tơ***: $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

* ***Tích vô hướng*** của hai vecto $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$





Câu 1.Tính $\vec{a}.\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=7,(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$;   b) $|\vec{a}|=8,|\vec{b}|=9,(\vec{a},\vec{b})=150^\circ$.

Giải

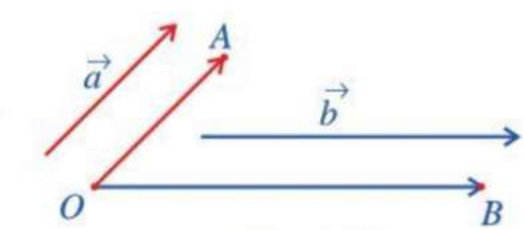
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=6\cdot 7\cdot\cos 45^\circ=42\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=21\sqrt{2}$.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=8\cdot 9\cdot\cos 150^\circ=72\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-36\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{D}=60^0$ và cạnh hình thoi dài 5cm, gọi O là giao điểm 2 đường chéo. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$.

2. Tích vô hướng của hai véc tơ bất kì $\vec{a};\vec{b}$.

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Nhớ

- Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

- Nếu $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$. Khi đó $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^\circ=0$.

- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b}$ và số thực k tuỳ ỳ, ta có:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (tính chất phân phối);

- $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$;

- $\vec{a}^2\geq 0, \vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

Dạng 1. Tính tích vô hướng của 2 véc tơ.

Câu 3. Cho hình vuông ABCD có tâm I. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB});(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})$;

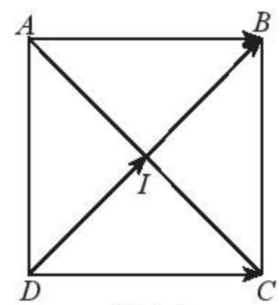
b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$.

HD:

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})$;

b) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.



Hình 2

Giải

a) Do hai vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}\right)=0^{\circ}$.

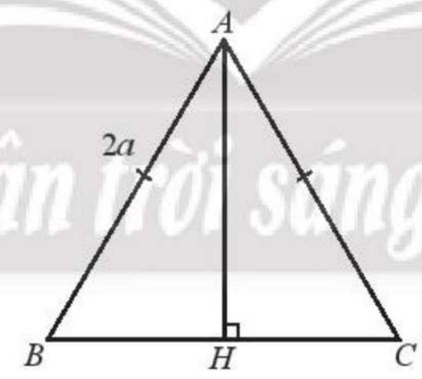
Do hai vectơ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên ta có $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)=180^{\circ}$.

b) Do hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ vuông góc nên ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=90^{\circ}$.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2a và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

HD:

Giải



Hình 3

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=2a\,.\,2a\,.\cos 60^{\circ}=4a^2\,.\,\frac{1}{2}=2a^2;$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=2a\,.\,2a\,.\cos 120^{\circ}=4a^2\,.\left(-\frac{1}{2}\right)=-2a^2;$$

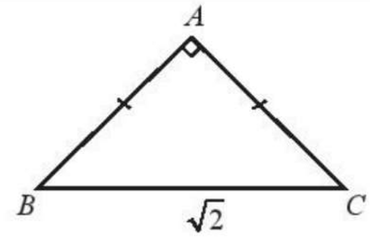
$$\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AH}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=\left|\overrightarrow{AH}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos 90^{\circ}=0.$$

$$\overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{HC}=\left|\overrightarrow{HB}\right|.\left|\overrightarrow{HC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=a\,.\,a\,.\cos 180^{\circ}=a^2(-1)=-a^2.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

HD:

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$.



Hình 4

Giải

Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=\sqrt{2}$ suy ra $AB=AC=1$.

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=1\,.\,1\,.\cos 90^\circ=0.$$

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=1\,.\sqrt{2}\,.\cos 45^\circ=\sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=1\,.\sqrt{2}\,.\cos 135^\circ=\sqrt{2}\,.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1.$$

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{i},\vec{j}$ vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và tính số đo góc $(\vec{a},\vec{b})$.

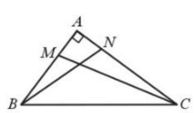
HD:

Ta có $\vec{a}\,.\,\vec{b}=(4\vec{i}-\vec{j})\,.\,(\vec{i}+4\vec{j})=4\vec{i}^{\,2}+16\vec{i}\,.\,\vec{j}-\vec{j}\,.\,\vec{i}-4\vec{j}^{\,2}=4-4=0.$

Vậy $\vec{a}\,.\,\vec{b}=0$. Suy ra $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=3$, $AC=4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thoả mãn $AM=AN=1$. Tính $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=3$, $AC=4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thoả mãn $AM=AN=1$ (*Hình 49*). Tính $\overrightarrow{BN}\,.\,\overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Giải

Vì $\widehat{A}=90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$, $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AN}=0$.

Ta có: $\overrightarrow{BN}\,.\,\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})\,.\,(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AN}\,.\,\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\,.\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

$=0-\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\,.\,\overrightarrow{AC}+0=-\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}=AB\,.\,AM=3\,.\,1=3$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AN}=AC\,.\,AN=4\,.\,1=4$.

Suy ra $\overrightarrow{BN}\,.\,\overrightarrow{CM}=-4-3=-7$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có AB=4, AC=6 . M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$.

HD:

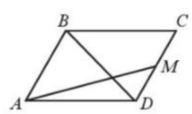
Giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\,.\,(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)$

$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\right)=\frac{1}{2}(6^2-4^2)=10.$

Câu 9. Cho hinh binh hành ABCD có $AB=3$, $AD=4, \hat{A}=60^{\circ}$. M là trung điểm của CD. Tính $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}}$.

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=3$, $AD=4$, $\widehat{A}=60°$. M là trung điểm của CD (*Hình 50*). Tính $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right).(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$=AD^2-\frac{1}{2}AD\,.\,AB\,.\cos\widehat{BAD}-\frac{1}{2}AB^2$$

$$=4^2-\frac{1}{2}\,.\,4\,.\,3\,.\cos 60°-\frac{1}{2}\,.\,3^2=\frac{17}{2}.$$

BTVN

Câu 10. Cho tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}$ bằng:

A. $AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}$.

B. $-AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}$.

C. $AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{ABC}$.

D. $AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{ACB}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ bằng:

A. $AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}$.

B. $AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{ABC}$.

C. $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$. D. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Câu 12. Cho đoạn thẳng AB. Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thoả mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:

A. Đường tròn tâm A bán kính AB.

B. Đường tròn tâm B bán kính AB.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

D. Đường tròn đường kinh AB.

Câu 13. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thi:

A. $MN = 9$. B. $MN = 3$. C. $MN = 81$. D. $MN = 6$.

Câu 14. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thoả mãn $BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$;

b) MN.

HD:

57. A. **58. A.** **59. D.** **60. B.**

61. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{a^2}{2}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$$

$$= a^2 \cos 120° + \frac{5}{4}a^2 \cos 120° + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2 \cos 120°$$

$$= -a^2.$$

b) $MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2 = \left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2 + 2 \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{5}{4} \,.\, \left|\overrightarrow{BC}\right| \,.\, \left|\overrightarrow{CA}\right| \,.\, \cos 120° + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$

$= \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2$. Vậy $MN = \frac{13}{12}a$.