

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

CA 1

Câu 1. Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$.

HD:

$$\begin{aligned}n^5 + 1 : (n^3 + 1) &\Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1) \\&\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1) \\&\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1) \\&\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1 \\&\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1\end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned}n^2 - n : n^2 - n + 1 &\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1) \\&\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1\end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 2. Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

HD:

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

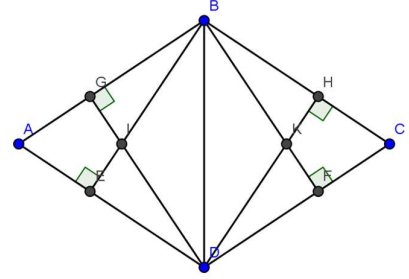
CA 2

Câu 1. Cho hình thoi ABCD. Vẽ bốn đường cao kẻ từ đỉnh B và D xuống các cạnh AD, AB, BC, CD; chúng cắt nhau ở I và K. Tứ giác BIDK là hình gì?

HD:

Trước hết chứng minh BIDK là hình bình hành (theo định nghĩa).

Sau đó chứng minh $\widehat{EBD} = \widehat{FBD}$ do $\triangle BED = \triangle BFD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông), do đó BIDK là hình thoi.



Câu 2. Cho tam giác ABC đều. Đường cao AD. M là điểm nằm giữa B và D. N là trung điểm của AM, kẻ $ME \perp AB (E \in AB)$, $MF \perp AC (F \in AC)$. Chứng minh DENF là hình thoi.

HD:

Có N là trung điểm của AM. Vì tam giác AEM và AFM vuông tại E và F nên

$$EN = \frac{1}{2} AM, FN = \frac{1}{2} AM, DN = \frac{1}{2} AM.$$

Theo định lý góc ngoài của tam giác có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ENM} = 2\widehat{EAM} \\ \widehat{DNM} = 2\widehat{DAM} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{END} = 60^\circ$$

Nên tam giác EDN đều.

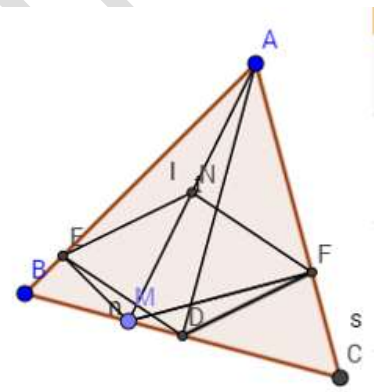
$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} \widehat{ENM} = 2\widehat{EAM} \\ \widehat{FNM} = 2\widehat{FAM} \end{array} \right\}$$

$$\text{Nên } \widehat{ENF} = 120^\circ$$

Nên góc FND bằng 60°

Nên tam giác DNF đều

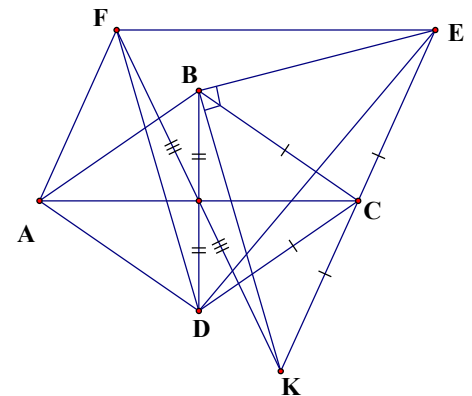
Vậy DENF là hình thoi



Câu 3. Cho hình thoi ABCD. Điểm E nằm ngoài hình thoi và không nằm trên đường thẳng CD sao cho $CE = CD$. Dựng hình bình hành ACEF. Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác DEF.

HD:

Vì ABCD là hình thoi nên $CB = CD$ và $BD \perp AC$ mà $AC \parallel EF$
 $\Rightarrow BD \perp EF$ (1).



Gọi K là điểm đối xứng với E qua C. Khi đó, tam giác EBK vuông tại B (vì $BC = \frac{1}{2} EK$). Ta có AFCK

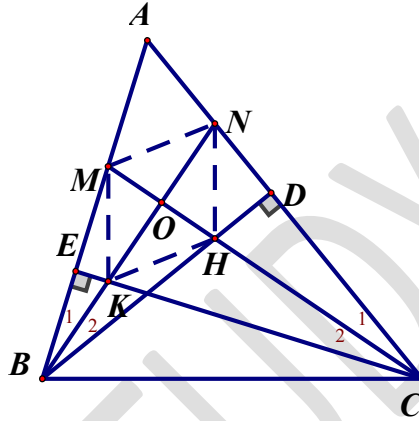
là hình bình hành vì $CK \parallel AF$, $CK = AF$. Do đó, CA và FK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mặt khác, ABCD là hình thoi nên CA, BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra BD và FK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường \Rightarrow BFDK là hình bình hành $\Rightarrow BK // DF \Rightarrow EB \perp DF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra B là trực tâm của tam giác DEF.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của các góc ABD và ACE cắt nhau tại O, cắt AC và AB lần lượt tại N và M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh rằng BN vuông góc với CM và tứ giác MNHK là hình thoi.

HD:



Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ vì cùng phụ góc A của tam giác ABC, do đó $\widehat{B_2} = \widehat{C_1}$ hay BN vuông góc với CM.

Khi đó tam giác BMH và CKN có phân giác là đường cao nên nó cân tại B và C, từ đó ta được BN là trung trực của MH và CM là trung trực của NK hay tứ giác MNHK là hình thoi.