TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Câu 8. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+3)=r^2+21$.

HD:

Vì $p,q\ge 2$ nên $r^2+21\ge 35 \Leftrightarrow r^2\ge 14 \Rightarrow r>3$ mà r là số nguyên tố

Khi đó $r^2+21 \not\vdots\, 3 \Rightarrow (p^2+1)(q^2+3) \not\vdots\, 3$

Giả sử $p\ne 3; q\ne 3$ thì $p^2=1\bmod 3; q^2=1\bmod 3; r^2=1\bmod 3$

Khi đó $\begin{cases}(p^2+1)(q^2+3)=2\bmod 3\\ r^2+21=1\bmod 3\end{cases}$ nên mâu thuẫn

Khi đó trong hai số p,q phải có một số bằng 3

TH1. $q=3 \Rightarrow (p^2+1)(q^2+3)\,\vdots\, 3$ mà $r^2+21 \not\vdots\, 3$ nên vô lý.

TH2. $p=3$, khi đó ta có:

$(3^2+1)(q^2+3)=r^2+21 \Rightarrow 10(q^2+3)=r^2+21$

$\Rightarrow 10q^2=r^2=9=(r-3)(r+3)$ (1)

Vì r là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $\begin{cases}r-3\,\vdots\,2\\ r+3\,\vdots\,2\end{cases} \Rightarrow (r-3)(r+3)\,\vdots\,4$

Khi đó từ (1) suy ra $q^2\,\vdots\,2 \Rightarrow q\,\vdots\,2 \Rightarrow q=2$ (do q là số nguyên tố)

Với $q=2$ ta có $r^2=49 \Rightarrow r=7$

Vậy $(p;q;r)=(3;2;7)$

Câu 10. Tìm các số tự nhiên x, y và số nguyên tố p thỏa mãn: $p^x=y^4+64$.

HD:

VINASTUDY.VN

- *Trường hợp 1:* $y \vdots 2 \Rightarrow y = 2k\ (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow p^x \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p = 2.$

$(1) \Leftrightarrow 2^x = (2k)^4 + 64 \Leftrightarrow 2^x = 16(k^4 + 4)$

Nếu k > 0, khi đó:

$k^4 + 4 = 2^m\ (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow k^4 = 2^m - 2^2$

$\Rightarrow k \vdots 2 \Rightarrow y = 4m_1\ (m_1 \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 2^x = (4m_1)^4 + 64 = 64(2m_1^4 + 1) = 2^6.(2m_1^4 + 1)$

$\Rightarrow (2m_1^4 + 1) \vdots 2\ (vô\ lí) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = 0\ ;\ x = 6.$

- *Trường hợp 2:* $y \not\vdots\ 2 \Rightarrow p \not\vdots\ 2$

$p^x = (y^2 + 8)^2 - (4y)^2 = (y^2 + 4y + 8)(y^2 - 4y + 8)$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2 + 4y + 8 = p^m \\ y^2 - 4y + 8 = p^n \end{cases} (m, n \in \mathbb{N}^*;\ m > n;\ m + n = x)$

$\Rightarrow p^m - p^n = 8y \Rightarrow p^n(p^{m-n} - 1) = 8y$, *trong đó* $(8; y) = 1$

$\Rightarrow p^m = 8$ (vô lí !) $\Rightarrow$ *y không thể là số lẻ !*

Đáp số (p ; x ; y) = (2 ; 6 ; 0)

Bài tập về nhà:

Câu 1. Tìm số nguyên tố p để: $2041 - p^2 \not\vdots\ 24$

HD:

Đặt $a = 2041 - p^2 = 2040 - (p^2 - 1) = 2040 - (p-1)(p+1)$

Nếu $p = 2 \Rightarrow a = 2037$ không chia hết cho 24 $\Rightarrow p = 2$ (nhận)

Nếu $p = 3 \Rightarrow a = 2032$ không chia hết cho 24 $\Rightarrow p = 3$ (nhận)

Nếu $p > 3$ mà p là số nguyên tố. Do đó p^2 chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 1 \vdots 3$

$p > 3$ mà p là số nguyên tố. Do đó p lẻ nên $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 8$. Mà $(3;8) = 1 \Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 24$

$\Rightarrow a = 2040 - (p-1)(p+1) \vdots 24$

Do đó $p > 3$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $p = 2; p = 3$

Câu 2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2^{p^2+2} - 8 \vdots 21$

HD:

1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ nên p^2+2 là số lẻ $\Rightarrow 2^{p^2+2}\equiv 2(mod\,3) \Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8\vdots 3(1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2\equiv 1(mod\,3) \Rightarrow p^2+2\vdots 3 \Rightarrow 2^{p^2+2}\equiv 1(mod\,7) \Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8\vdots 7(2)$.

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

HD:

Ta có $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1=\left(n^{2024}-n^2\right)+\left(n^{2023}-n\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

$=n^2\left(n^{2022}-1\right)+n\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)=\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

Ta có $\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)=\left(n^2+n\right)\left[\left(n^3\right)^{674}-1\right]$

$=\left(n^2+n\right)\left(n^3-1\right).B=\left(n^2+n\right)\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right).B$ chia hết cho n^2+n+1

Lại có $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ chia hết cho n^2+n+1

Vậy $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ chia hết cho n^2+n+1 với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.

Câu 4. Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b,c.

HD:

b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x)=x^2+bx+c$ là u,v.

Theo định lý Vi – ét ta được $u+v=-b$, $uv=c$.

Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9-u)(9-v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9-u|=1$ hoặc $|9-v|=1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9-u|=1 \Leftrightarrow u\in\{8;10\}$.

Trường hợp 1. $u=10$, vì $|c|\le 16$, nên $|v|\in\{0;1\} \Leftrightarrow v\in\{-1;0;1\}$.

Mặt khác $9-1=8$, $9-0=9$, $9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2. $u=8$, vì $|c|\le 16$, nên $|v|\le 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v\in\{-2;2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b,c tương ứng là $-10,16$ và $-6,-16$.

Vậy tất cả cặp (b,c) thỏa mãn là $(b,c)\in\{(-10,16);(-6,-16)\}$.