TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân, tìm số hạng đầu, công bội và viết công thức số hạng tổng quát dạng $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

a) $u_n = 2 \cdot 4^n$.b) $v_n = 3^{n+1}$.c) $w_n = \frac{3}{2^n}$

HD:

a) Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2 \cdot 4^n$.

Tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot 4^n} = 4$ không đổi, nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$, số hạng đầu

$u_1 = 2 \cdot 4^1 = 8$.

Số hạng tổng quát $u_n = 8 \cdot 4^{n-1}$.

b) Xét dãy số (v_n) với $v_n = 3^{n+1}$.

Tỉ số $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{n+1+1}}{3^{n+1}} = 3$ không đổi, nên (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$, số hạng đầu $v_1 = 3^2 = 9$.

Số hạng tổng quát $v_n = 9 \cdot 3^{n-1}$.

c) Xét dãy số (w_n) với $w_n = \frac{3}{2^n}$.

Tỉ số $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{3} = \frac{1}{2}$ không đổi, nên (w_n) là cấp số nhân, với công bội $q = \frac{1}{2}$, số hạng đầu

$w_1 = \frac{3}{2}$.

Số hạng tổng quát $w_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$.

Câu 2. Tìm cấp số nhân có 4 số hạng, biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 27 và tích của hai số hạng còn lại bằng 72.

HD:

Gọi số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó lần lượt là U_1, q.

Theo đề bài ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} U_1 + U_1q^3 = 27 \\ U_1.U_1q^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1q^3 = 27 - U_1 \\ U_1^2 - 27U_1 + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1q^3 = 27 - U_1 \\ \left[\begin{array}{l} U_1 = 3 \\ U_1 = 24 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} U_1 = 24 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Có 2 cấp số nhân thỏa mãn yêu cầu đề bài $3;6;12;24$ và $24;12;6;3$.

Câu 3. Xác định số hạng đầu và công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân sau.

a) $\begin{cases} u_7 + u_1 = 325 \\ u_1 - u_3 + u_5 = 65 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$

HD:

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân.

$$\begin{cases} u_7 + u_1 = 325 \\ u_1 - u_3 + u_5 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^6 + u_1 = 325 \\ u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(q^2+1\right)\left(q^4 - q^2 + 1\right) = 325 \\ u_1\left(q^4 - q^2 + 1\right) = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + 1 = 5 \\ u_1\left(q^4 - q^2 + 1\right) = 65 \end{cases}$$

Suy ra, $\Leftrightarrow \begin{cases} q = \pm 2 \\ u_1 = 5 \end{cases}$.

Vậy cấp số nhân có $u_1 = 5; q = \pm 2; u_n = 5.(\pm 2)^{n-1}\ (n \ge 2)$.

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân.

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_1q} + \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ \dfrac{1+q+q^2}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ \dfrac{u_1\left(1+q+q^2\right)}{u_1^2q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ \dfrac{1}{(u_1q)^2} = \dfrac{1}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ u_2^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ \left[\begin{array}{l} u_2 = 6 \\ u_2 = -6 \end{array}\right. \end{cases} \quad (*)$$

TH1. $u_2 = 6$

Thay $u_2 = 6$ vào hệ phương trình (*) ta được.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=21 \\ u_1q=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \\ u_1=\dfrac{6}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6q^2-15q+6=0 \\ u_1=\dfrac{6}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=2 \\ u_1=3 \end{cases} \\ \begin{cases} q=\dfrac{1}{2} \\ u_1=12 \end{cases} \end{array}\right.$$

TH2. $u_2 = -6$

Thay $u_2 = -6$ vào hệ phương trình (*) ta được.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=21 \\ u_1q=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \\ u_1=\dfrac{-6}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6q^2+27q+6=0 \\ u_1=\dfrac{-6}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\dfrac{-9\pm\sqrt{65}}{4} \\ u_1=\dfrac{27\pm3\sqrt{65}}{2} \end{cases}$$

Vậy với $\forall n \geq 2$ ta có các cấp số nhân như sau.

$u_1 = 2; q = 3; u_n = 2.3^{n-1}$

$u_1 = \dfrac{1}{2}; q = 12; u_n = \dfrac{1}{2}.12^{n-1}$

$u_1 = \dfrac{27\pm3\sqrt{65}}{2}; q = \dfrac{-9\pm\sqrt{65}}{4}, u_n = \dfrac{27\pm3\sqrt{65}}{2}.\left(\dfrac{-9\pm\sqrt{65}}{4}\right)^{n-1}$

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=49\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}+\dfrac{1}{u_5}\right). \\ u_1+u_3=28 \end{cases}$$

Xác định giá trị của u_{13}.

HD:

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1}$, $\dfrac{1}{u_2}$, $\dfrac{1}{u_3}$, $\dfrac{1}{u_4}$, $\dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\frac{1}{q^5}-1}{\frac{1}{q}-1}\right) & (1) \\ u_1+u_1q^2=28 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=\dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right)\Leftrightarrow u_1^2q^4=49\Leftrightarrow u_1q^2=\pm 7$.

Với $u_1q^2=-7$. Thay vào (2), ta được $u_1-7=28\Leftrightarrow u_1=35$. Suy ra $q^2=-\dfrac{7}{35}$ (vô lý).

Với $u_1q^2=7$. Thay vào (2), ta được $u_1+7=28\Leftrightarrow u_1=21$. Vậy $\begin{cases} u_1=21 \\ q=\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=28 \\ q=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

Khi đó $u_{13}=u_1.q^{12}=\dfrac{7}{243}$.