

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

ĐẠI SỐ

Câu 10. Chứng minh rằng: $a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$

HD:

Ta có: $a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 - b(a-c)(a+c-b)^2 = 0$ (1)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

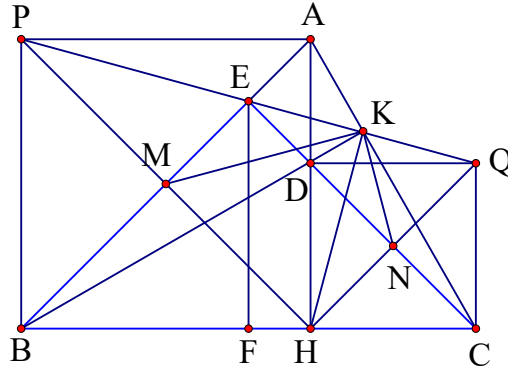
$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (dfcm) \end{aligned}$$

HÌNH HỌC

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có góc B bằng 45° và vẽ đường cao AH Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm đối xứng với H qua M.

- Chứng minh AHBP là hình vuông.
- Vẽ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh $HP = 2MK$.
- Gọi D là giao điểm của AH và BK. Qua D và C vẽ các đường thẳng lần lượt song song với BC và AH Sao cho chúng cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.
- Chứng minh các đường thẳng CD, AB và PQ đồng quy.

HD:



a) Vì M là trung điểm của AB và PH
 nên tứ giác ABCD là hình bình hành
 mà $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên AHBP là hình chữ nhật,
 vì $\widehat{ABH} = 45^\circ$ nên tam giác ABH vuông cân tại H $\Rightarrow HA = HB$.
 Hình chữ nhật APBH có $HA = HB$ nên là hình vuông.

b) Sử dụng tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông ABK suy ra $AB = 2MK$.
 Dùng kết quả câu a suy ra $HP = AB$ do đó $HP = 2MK$.

c) Từ $HP = 2MK$ suy ra tam giác HKP vuông tại K. Suy ra $\widehat{HKP} = 90^\circ$.
 Chứng minh tương tự ta có $\widehat{HKQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PKQ} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Suy ra P, K, Q thẳng hàng.

d) Gọi E là giao điểm của PQ và AB, F là trung điểm của BC.
 Ta có $ME \parallel HQ$ (vì cùng vuông góc với PH) mà M là trung điểm của PH nên ME là đường trung bình của tam giác HPQ. Suy ra E là trung điểm của PQ suy ra EF là đường trung bình của hình thang BPCQ:

$$EF = \frac{1}{2}(PB+CQ) = \frac{1}{2}(BH+HC) = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle EBC \text{ vuông tại } E \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

Mặt khác ta có: $CD \perp AB$ do D là trực tâm của tam giác ABC.

Như vậy $CD \perp AB, CE \perp AB \Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng do đó CD, AB và PQ đồng quy.