TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 7
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....**Ngày học:** .....

CA 1

Câu 8. Chứng minh $\frac{1}{65}<\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{1}{2023^3}<\frac{1}{40}$

HD:

$A=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{1}{2023^3}$

*) Với $n>1$, ta có $0<(n-1)n(n+1)=n^3-n<n^3$

$\$\Rightarrow\frac{1}{n^3}<\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\$$

Do đó:

$A=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{1}{2023^3}<\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{2022.2023.2024}=B$

Ta có $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$ nên

$B=\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{2022.2023.2024}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}-\frac{1}{2023.2024}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{2023.2024}\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{4.5}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2023.2024}$

$=\frac{1}{40}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2023.2024}<\frac{1}{40}$

Vậy $A<B<\frac{1}{40}$ (1)

*) Với $n>1$, ta có $\frac{1}{n^3}>\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Do đó: $A>\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{2023.2024.2025}$

VINASTUDY.VN

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{6.7}-\frac{1}{7.8}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}-\frac{1}{2023.2024}+\frac{1}{2023.2024}-\frac{1}{2024.2025}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{2024.2025}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2024\cdot 2025}$$

$$=\frac{1}{60}-\frac{1}{2.2024.2025}>\frac{1}{60}-\frac{1}{780}=\frac{13-1}{780}=\frac{1}{65}$$

Vậy $A>\frac{1}{65}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

VINASTUDY.VN