TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

CA 1

Bài 12. Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.

HD:

Đặt $A=4x^2y^2-7x+7y$. Ta xét các hiệu sau

$$A-(2xy-1)^2=4xy-7x+7y-1$$
$$(2xy+1)^2-A=4xy+7x-7y+1$$

Bài 13. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m,n) sao cho 2^m3^n-1 là số chính phương.

HD:

Trong bài toán này, ta xét các trường hợp sau.

(1) Với $m\ge 2$, ta có 2^m3^n chia hết cho 4 và vì thế

$2^m3^n-1\equiv -1\equiv 3 \pmod 4$.

Không có số chính phương nào chia 4 dư 3 . Trường hợp này không xảy ra.

(2) Với $m=1$, ta có $2\cdot 3^n-1$ là số chính phương. Nếu $n\ge 1$ thì

$2\cdot 3^n-1\equiv -1\equiv 2 \pmod 3$.

Không có số chính phương nào chia 3 dư 2 nên $n=0$. Với $m=1,n=0$, ta thấy thoả mãn.

(3) Với $m=0$, ta có 3^n-1 là số chính phương. Nếu $n\ge 1$ thì

$3^n-1\equiv -1\equiv 2(\bmod 3)$.

Không có số chính phương nào chia 3 dư 2 nên $n=0$. Với $m=n=0$, ta thấy thoả mãn. Như vậy có hai cặp (m,n) thoả mãn đề bài là $(0,0)$ và $(1,0)$.

CA 2

Bài 6. Có 2023 vận động viên thi đấu bóng bàn theo thể thức đấu vòng tròn, mỗi đấu thủ đấu với tất cả các đấu thủ còn lại. Kết quả mỗi trận đấu chỉ có thắng hoặc thua, không có hòa. CMR có thể xếp 2023 vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau.

HD:

Xét tất cả các cách xắp xếp một số vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau. Vì số cách xắp xếp như vậy là hữu hạn nên tồn tại một cách xếp T sao cho cách xếp này có nhiều vận động viên nhất.

Giả sử cách xắp xếp T không xếp được 2023 vận động viên và A là một đấu thủ không nằm trong cách xếp T.

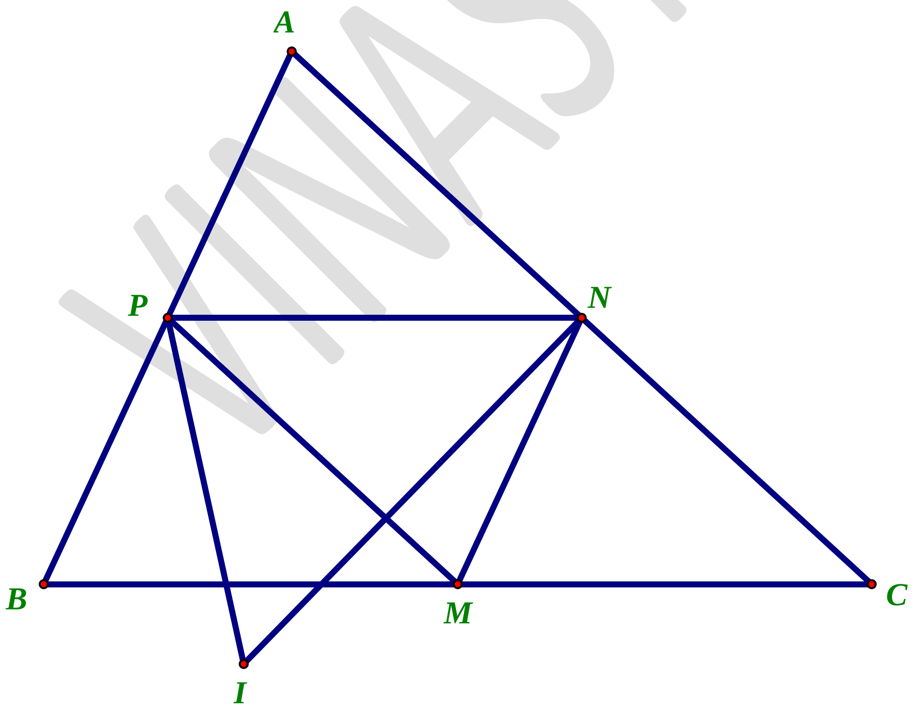
Giả sử trong cách xắp xếp T có n người $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho A_i thắng A_{i+1}. Nếu A thắng A_1 thì cách xắp xếp $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ có nhiều vận động viên hơn cách xắp xếp T. Do đó A thua A_1. Lập luận tương tự như vậy ta dẫn đến A thua tất cả các vận động viên $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tuy nhiên, khi đó lại có cách xắp xếp $A_1, A_2 \ldots . A_n, A$ có nhiều vận động viên hơn cách xắp xếp T.

Vậy cách xắp xếp T phải chứa tất cả các vận động viên và ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Có 2023 điểm trên mặt phẳng sao cho các tam giác bất kì có 3 đỉnh là ba trong số 2023 điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá 1 (đơn vị diện tích). CMR có thể đặt 2023 điểm đã cho trong một tam giác có diện tích không vượt quá 4 (đơn vị diện tích).

HD:

Vì số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 2023 điểm đã cho là hữu hạn nên tồn tại một tam giác có diện tích lớn nhất. Giả sử ba đỉnh của tam giác là M, N, P. Xét tam giác ABC sao cho M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.



Ta có: $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta MNP} \le 4$. Ta chứng minh 2023 điểm đã cho nằm trong tam giác ABC. Thật vậy, giả sử tồn tại điểm I trong số 2023 điểm đã cho nằm ngoài tam giác ABC. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử I nằm khác phía với A đối với BC. Khi đó, $S_{\Delta INP} > S_{\Delta MNP}$, vô lí vì diện tích tam giác MNP lớn nhất.