

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**  
**HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Ca 1**

**Câu 5.** Tìm nghiệm nguyên của pt  $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$

HD:

$$\begin{aligned}x^4 + (x+1)^4 &= y^2 + (y+1)^2 \quad (1) \\ \Leftrightarrow 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= 2y^2 + 2y + 1 \\ \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x &= y^2 + y \\ \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 &= y^2 + y + 1 \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (2), ta suy ra  $(y^2 + y + 1)^2$  là một số chính phương

+) Xét  $y > 0$ , ta có:

$$y^2 < y^2 + y + 1 < (y+1)^2 \quad (\text{Vô lí}) \Rightarrow y \leq 0$$

+) Xét  $y < -1$ , ta có:  $(y+1)^2 < y^2 + y + 1 < y^2$  (Vô lí)  $\Rightarrow y \geq -1$

$$\text{Do đó, ta có: } -1 \leq x \leq 0, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Với  $y = -1$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \quad (\text{Vì } x^2 + x \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

- Với  $y = 0$ , kết quả tương tự

Vậy nghiệm nguyên của phương trình (1) là  $(x, y) = (0, 0); (0, -1); (-1, 0); (-1, -1)$

**Ca 2**

**Câu 4.** Cho hình vuông ABCD. Vẽ một tia gốc A cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N.

Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh các tam giác ANP và AQM là những tam giác vuông cân.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của NP và MQ. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, B, D thẳng hàng.

HD:

a) Xét tam giác ABP và tam giác AND có:

$$AB = AD; \widehat{ABP} = \widehat{ADN} = 90^\circ;$$

$$\widehat{DAN} = \widehat{BAP} \text{ (Vì cùng phụ với } \widehat{MAB} \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABP = \Delta AND \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AP = AN.$$

Xét tam giác APN có  $AP = AN$  và  $\widehat{PAN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta APN$  vuông cân tại A.

Chứng minh tương tự ta có  $\Delta AQM$  vuông cân tại A (đpcm).

b) Xét tam giác APN vuông tại A có AE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền PN

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2}PN. \quad (1)$$

Xét tam giác PCN có CE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền PN

$$\Rightarrow CE = \frac{1}{2}PN. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $AE = CE$ .

Chứng minh tương tự ta có  $FA = FC = \frac{1}{2}QM$ .

Khi đó các điểm D, F, B, E cách đều hai đầu đoạn thẳng AC nên 4 điểm D, F, B, E thẳng hàng (đpcm).

