

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**CA 1**

Câu 5. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1) = 2 \end{cases}$$

*Hà Tĩnh 2023*

HD:

ĐKXĐ:  $x+y \neq 0; 2x+y+1 > 0; x^2-x-1 > 0$  (\*). Từ phương trình  $x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1$

$$\Rightarrow x^2(x+y)+y^2(x+y)+2xy-x-y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y)-x^2+y^2(x+y)-y^2+x^2+2xy+y^2-x-y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y-1)+y^2(x+y-1)+(x+y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$$

Xét  $x+y-1=0$  thay vào phương trình  $\sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1)=2$  được

$$\sqrt{x+2}(x^2-x-1)=2. \text{ Với điều kiện } x^2-x-1 \geq 0, \text{ ta có } (x+2)(x^2-x-1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^4-2x^3-x^2+2x+1)-4=0 \Leftrightarrow x^5-5x^3+5x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^5-4x^3-x^3+4x+x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4+2x^3-x^2-2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-1)^2=0. \text{ Với } x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \text{ (TMĐK).}$$

$$\text{Với } x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}; x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2-x-1 < 0 \text{ (loại)}$$

Xét  $x^2+y^2+x+y=0$ , ta có  $x^2+y^2+x+y=(x^2-x-1)+y^2+(2x+y+1) > 0$  (theo ĐKXĐ)

Thay vào ĐKXĐ (\*). Hệ phương trình có tập nghiệm  $(x; y) \in \left\{ (2; -1), \left( \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$

CA 2

**Bài 8.** (Trích đề học sinh giỏi toán 9 cấp tỉnh Vũng Tàu năm học 2022-2023)

Cho 2024 phân số gồm:  $\frac{1}{2024}; \frac{2}{2024}; \frac{3}{2024}; \dots; \frac{2023}{2024}; \frac{2024}{2024}$ . Mỗi lần thực hiện xóa đi hai số  $a;$

$b$  bất kỳ trong dãy trên và thay vào đó số  $a + b - 4ab$ . Cứ làm như vậy đến khi còn duy nhất một số.

Hãy tìm số đó.

HD:

Gọi  $a_i = \frac{i}{2024}$  với  $i \in \mathbb{N}^*; i \leq 2024$

Đặt thì  $T = 0$  vì  $4a_{506} - 1 = 4 \cdot \frac{506}{2024} - 1 = 1 - 1 = 0$

Khi ta xóa đi hai số bất kỳ  $a_m; a_n$  nào đó trong dãy ban đầu thì  $T$  bị mất 2 thừa số là  $4a_m - 1; 4a_n - 1$  nhưng lại thêm thừa số  $4(a_m + a_n - 4a_m a_n) - 1$

Mặt khác  $4(a_m + a_n - 4a_m a_n) - 1 = (4a_m - 1)(1 - 4a_n) = -(4a_m - 1)(4a_n - 1)$

Do đó  $|T|$  không đổi và bằng 0

Gọi  $x$  là số còn lại cuối cùng thì ta có  $4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

**Bài 10.** (Trích đề học sinh giỏi toán 9 cấp tỉnh Quảng Trị năm học 2022-2023)

Một giải cầu lông có  $n$  ( $n \geq 2$ ) vận động viên tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai vận động viên bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận, không có kết quả hoà). Chứng minh rằng tổng các bình phương số trận thắng và tổng các bình phương số trận thua của các vận động viên là bằng nhau.

HD:

Gọi  $a_i$  là số trận thắng của vận động viên số  $i$  ( $1 \leq i \leq n; i \in \mathbb{N}^*$ ).

$b_i$  là số trận thua của vận động viên số  $i$ .

Có  $n$  vận động viên, vậy mỗi vận động viên tham gia  $n - 1$  trận đấu.

Ta có bảng sau:

Vận động viên	Trận thắng	Trận thua	Tổng
$i = 1$	$a_1$	$b_1$	$a_1 + b_1 = n - 1$
$i = 2$	$a_2$	$b_2$	$a_2 + b_2 = n - 1$
...	...	...	...
$i = n$	$a_n$	$b_n$	$a_n + b_n = n - 1$

Mỗi vận động viên tham gia không có hoà, hai vận động viên đấu với nhau đúng một trận nên tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua.

Hay  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 0.$$

Ta chứng minh tổng các bình phương số trận bằng tổng các bình phương số trận thua.

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + \dots + (a_n^2 - b_n^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - b_1)(a_1 + b_1) + (a_2 - b_2)(a_2 + b_2) + \dots + (a_n - b_n)(a_n + b_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - b_1)(n-1) + (a_2 - b_2)(n-1) + \dots + (a_n - b_n)(n-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)[(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1).0 = 0 \text{ (đúng với } a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \text{) (điều phải chứng minh).}$$