TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2)(2-y)=8\\ \sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy\end{cases}$

HD:

ĐK: $11-4(x-y)\ge 0$

$(x+2)(2-y)=8 \Leftrightarrow 2(x-y)-xy=4 \Leftrightarrow 2(x-y)=4+xy$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{11-2(4+xy)}+x^2y^2-3xy+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-2xy}+x^2y^2-3xy+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3-2xy}-1)+\left(x^2y^2-3xy+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-xy)}{\sqrt{3-xy}+1}+(xy-1)(xy-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-xy)\left(\frac{2}{\sqrt{3-xy}+1}+2-xy\right)=0$$

$$\Leftrightarrow xy=1\left(\text{ do } \frac{2}{\sqrt{3-xy}+1}+2-xy>0 \text{ voi moi } xy\le\frac{3}{2}\right)$$

Vậy $\begin{cases}xy=1\\ 2(x-y)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ 2\left(x-\frac{1}{x}\right)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ 2x^2-5x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4};\frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right)$ và $(x,y)=\left(\frac{5-\sqrt{41}}{4};\frac{-5-\sqrt{41}}{4}\right)$

HÌNH HỌC

Câu 2. Cho đường tròn (O,R), dây BC cố định không đi qua tâm. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và kéo dài cắt (O) lần lượt tại M, N, P.

d) Gọi K là giao EF và AH. Chứng minh K là trực tâm tam giác XBC (X là trung điểm AH).

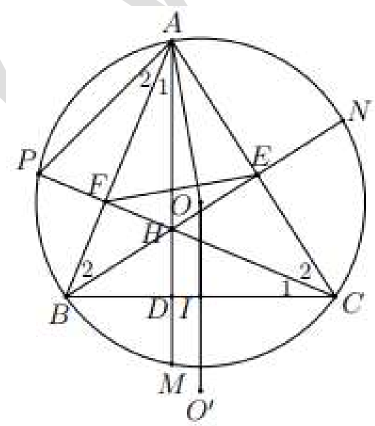
e) Chứng minh khi A di động trên cung lớn BC của (O) cố định thì AH không đổi, và H luôn thuộc một đường tròn cố định.

f) Tìm vị trí điểm A sao cho S_{AEF} lớn nhất.

g) Tìm vị trí điểm A sao cho chu vi ΔDEF lớn nhất.

h) Tìm vị trí điểm A sao cho chu vi ΔMNP lớn nhất.

HD:



d) Dễ chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, nên:

$$\widehat{AFE}=\widehat{ACB}\Rightarrow \Delta AFE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{S_{AFE}}{S_{ACB}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\left(\cos\widehat{BAC}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{AFE}=\left(\cos\widehat{BAC}\right)^2.S_{ACB}=\frac{1}{2}\left(\cos\widehat{BAC}\right)^2.BC..AD.$$

Do $BC, \cos\widehat{BAC}$ không đổi, nên S_{AFE} lớn nhất khi AD_{max} hay A, O, D thẳng hàng tức A là trung điểm cung lớn BC.

e) Từ $EF \perp OA \Rightarrow S_{OEAF}=OA.EF=R.EF$.

Tương tự ta chứng minh được $OB\perp DF \Rightarrow S_{OFBD}=OB.DF=R.DF$ và $OC\perp DE\Rightarrow S_{ODCE}=OC.DE=R.DE$.

Vậy $S_{ABC}=S_{OEAF}+S_{OFBD}+S_{ODCE}=R\left(EF+FD+DE\right)\Leftrightarrow 2AD.BC=R.C_{DEF}$

$$\Rightarrow C_{DEF}=\frac{2BC}{R}.AD.$$

Vì BC, R không đổi nên C_{DEF} lớn nhất khi AD lớn nhất hay AD qua O hay A là trung điểm của cung lớn BC.

f) Từ e), dựa vào mối liên hệ giữa hai tam giác đồng dạng DEF và MNP, ta cũng chứng minh được chu vi tam giác MNP lớn nhất khi A là trung điểm cung lớn BC.

Chứng minh: Để chứng minh K là trực tâm của tam giác IBC ta chứng minh: $CK\perp IB$.

Ta sẽ chứng minh: $IBC+KCB=90^\circ$

Ta có : $IBC=IBE+EBC=IBE+90^\circ-ACB(5)$

Để ý rằng: 4 điểm A, E, F, H nằm trên đường tròn tâm I là trung điểm của AH nên

$EIH = 2EAH = 2PBC = PBE$ (do H đối xứng với P qua D).

Suy ra tứ giác EIBP nội tiếp nên $IBE = IPE$ (6).

Ta cũng có: $AEF = ABC = APC$ nên tứ giác $EKPC$ nội tiếp suy ra $IPE \equiv KPE = KCE = ACB - KCB$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra $IBE = ACB - KCB$ thay vào (5) ta có: $IBC = 90^{\circ} - KCB$.

Từ đó suy ra: $IBC + KCB = 90^{\circ}$.

Vậy $KC \perp IB$, kết hợp $IK \perp BC$ suy ra K là trực tâm tam giác IBC.

Ngoài ra ta cũng có thể làm theo cách sau:

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ cắt IC tại K_1 theo tính chất quen thuộc về tiếp tuyến cát tuyến ta có: $IK_1 \cdot IC = IE^2 \left(1'\right)$, mặt khác ta cũng có 5 điểm I, F, D, M, E nằm trên cùng một đường tròn nên $IEF = IDF = IDE$ suy ra $\Delta IEK \sim \Delta IDE \Rightarrow IE^2 = IK.ID\left(2'\right)$

Từ (1'), (2') suy ra $IK_1 \cdot IC = IK.ID \Rightarrow DKK_1C$ nội tiếp. Nên góc $KK_1C = 90^{\circ}$