TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:... Ngày học:....................................

1. Khái niệm:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = 2x$.

Xét dãy số (x_n), với $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Hoàn thành bảng giá trị $f(x_n)$ tương ứng:

x	$x_1 = 2$	$x_2 = \frac{3}{2}$	$x_3 = \frac{4}{3}$	$x_4 = \frac{5}{4}$	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1) = ?$	$f(x_2) = ?$	$f(x_3) = ?$	$f(x_4) = ?$	...	$f($

Ta thấy khi $x_n \to 1$ thì $f(x_n) \to 2$

Ví dụ: Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} (x \neq 3)$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq 3$ và $\lim x_n = 3$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim \frac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3} = \lim(x_n + 3) = \lim x_n + \lim 3 = 3 + 3 = 6$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$.

2. Phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M (L, M \in \mathbb{R})$ thì

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ: Tính:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + x - 6\right)$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1}$.

HD:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + x - 6\right) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + 2x + 3\right)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1}(2x) + \lim\limits_{x \to 1} 3}{\lim\limits_{x \to 1}(2x) - \lim\limits_{x \to 1} 1} = \dfrac{1 + 2 + 3}{2 - 1} = 6$

3. Giới hạn 1 phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x}$.

HD:

Với dãy số (x_n) bất kì, $.x_n < 2$. và $x_n \to 2$, ta có:

$$\lim_{x_n\to 2^-}\sqrt{2-x_n}=\sqrt{\lim_{x_n\to 2^-}(2-x_n)}=\sqrt{2-\lim_{x_n\to 2^-}x_n}=\sqrt{2-2}=0\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=0.$$

Định lí: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L.$

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

a) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

b) Cho hàm số . $y=f(x)$. xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

Chú ý: Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to+\infty}c=c;\ \lim_{x\to-\infty}c=c;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^k}=0;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}$.

HD:

Ta có: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

5. Giới hạn vô cực 1 phía của hàm số tại 1 điểm

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to a$, ta có $f(x_n)\to+\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to a^+$.

- Các trường hợp $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có hai giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-a}=+\infty;\quad \lim_{x\to a^-}\frac{1}{x-a}=-\infty.$$

Ví dụ: Tính: $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}$

6. Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to+\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$.

- Các trường hợp $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có ba giới hạn cơ bản sau:

- $\lim_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k là số nguyên dương.

- $\lim_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k là số nguyên dương chẵn.

- $\lim_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

Ví dụ: Tính: $\lim_{x\to+\infty} x^3;\ \lim_{x\to-\infty} x^3$.

HD:

Ta có: $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

Câu 1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to-3} x^2$ b) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$.

Câu 2. Biết rằng hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim_{x\to2^-} f(x)=3$ và $\lim_{x\to2^+} f(x)=5$. Trong trường hợp này có tồn tại giới hạn $\lim_{x\to2} f(x)$ hay không? Giải thích.

Câu 3. Tính các giới hạn sau:

c) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Câu 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+1}{3x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x-11}{2x+3}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{x-6}$ g) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{x-7}$.

Câu 5. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}(t\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 6. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x)=50000+105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
LUYỆN TẬP
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:.. Ngày học:...

Câu 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD ; G là trung điểm của $MN; A'$ là giao điểm của AG và (BCD).

a) Nêu cách dựng điểm A'.

b) Chứng minh GA=3.GA'

Câu 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD và I là trung điểm của OM. Chứng minh

a) ON//(SAB).

b) $BC//(OMN)$.

c) Thiết diện của hình chóp cắt bởi (OMN) là hình bình hành.

d) Xác định ảnh của tứ S.ABCD qua phép chiếu song song theo phương MN lên mặt (SAB).

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh (OMN)//(SBC).

b) Giả sử hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là đường phân giác trong của hai tam giác SAD và SAB. Chứng minh $EF//(SBD)$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', A'B', B'C'$.H là điểm bất kì thuộc cạnh AA' và (P) là mặt phẳng đi qua H và song song với mặt phẳng (MNP). Chứng minh các đoạn giao tuyến của hình lăng trụ với mặt phẳng (P) tạo thành một hình thang.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM$ với $0 < x < a$. Tính MQ theo a và x.

Giáo viên: Thầy Trần Ngọc Hà