TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Bài 4.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$.

b) Cho a,b,c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2+ab=c^2+bc$ và $a^2+ac=b^2+bc$.

Tính giá trị của biểu thức $K=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

HD:

1 Điều kiện xác định: $x\geqslant -\frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho $\sqrt{x+3}$ và $\sqrt{3x+1}$, ta được

$VT=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3x+1}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{4+(x+3)}{2}+\frac{4+(3x+1)}{2}\right)=x+3=VP$. Vậy

$PT\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\\sqrt{3x+1}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

2 Trừ theo vế hai đẳng thức $a^2+ab=c^2+bc$ và $a^2+ac=b^2+bc$ ta thu được

$$(b-c)(a+b+c)=0.$$

Ta xét hai trường hợp sau

- $a+b+c=0$, thay vào ta được $K=-1$.
- $b-c=0$. Khi đó $a^2+ab=2b^2$, dẫn tới $\left[\begin{array}{l}a=b=c\\a=-2b=-2c.\end{array}\right.$

Nếu $a=-2b=-2c$ thì $a+b+c=0$ và do đó $K=-1$. Nếu $a=b=c$ thì ta thu được $K=8$.

Bài 5.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên m,n thỏa mãn $3^m+2022=n^2$.

b) Tìm tất cả số nguyên tố p để phương trình $x^3+y^3-3xy+1=p$ có nghiệm nguyên dương.

HD:

1 Giả sử m là một số tự nhiên thoả mãn $3^m + 2022 = n^2$.

Nếu $m \geqslant 2$ ta có $n^2 - 2022 = 3^m \vdots 9$. Điều này dânn đến $n^2 + 3 \vdots 9$.

Ta thấy, một số khi chia cho 9 có thể có các số dư sau: $\{0,1,2,\ldots,8\}$, từ đó dẫn tới một số chính phương khi chia cho 9 chỉ có thể dư $0,1,4,7$.

Khi đó $n^2 + 3$ không thể chia hết cho 9 .

Vậy $m < 2$, thử trực tiếp ta có được $m = 1, n = 45$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó $m = 1, n = 45$.

2 Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc ta có,

$$x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)\left(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy\right).$$

Khi đó phương trình tương đương với $(x + y + 1)\left(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy\right) = p$.

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là x, y. Khi đó $x + y + 1 \geq 3$, nên chỉ có trường hợp sau

$$\begin{cases} x + y + 1 = p \\ x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy = 1. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai tương đương với $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Mà

$2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2, x, y$ là các số nguyên dương, ta suy ra

$(x, y) \in \{(2,2),(2,1),(1,2)\}$. Chú ý $p = x + y + 1$ là số nguyên tố nên chỉ có cặp $(x, y) = (2,2)$ thoả mãn.

Khi đó $p = 5$.

Bài 6. Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{ab}{1+ab} + \dfrac{bc}{1+bc} + \dfrac{ca}{1+ca}$.

HD:

- Timm giá tri lớn nhất của P.

$$\begin{aligned} P &= 3 - \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca}\right) \\ &\leqslant 3 - \frac{9}{3 + ab + bc + ca} \\ &\leqslant 3 - \frac{9}{3 + \dfrac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{12}{13}. \end{aligned}$$

Vậy $\max P=\frac{12}{13}$. Dấu bằng xãy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

- Tìm giá trị nhỏ nhát của P.

  Cách 1: Không mắt tính tổng quát giả sử $1\geqslant a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$, suy ra $ab,bc,ca\geqslant 0$. Vì $0\leqslant a,b\leqslant 1$ nên $(a-1)(b-1)\geqslant 0$ suy ra $ab+1\geqslant a+b$. Do đó,

$$\frac{a+b}{ab+1}\leqslant 1.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng được

$$\frac{b+c}{bc+1}\leqslant 1 \text{ và } \frac{c+a}{ca+1}\leqslant 1.$$

Đặt

$$Q=\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ac+1}.$$

Khỉ đó,

$$\begin{aligned}2Q&=\frac{a+b+c}{ab+1}+\frac{a+b+c}{bc+1}+\frac{a+b+c}{ac+1}\\&=\frac{a+b}{ab+1}+\frac{c}{ab+1}+\frac{b+c}{bc+1}+\frac{a}{bc+1}+\frac{a+c}{ac+1}+\frac{b}{ac+1}\\&\leqslant 1+c+1+a+1+b=5.\end{aligned}$$

Suy ra $P=3-Q\geqslant 3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

Vầy $\min P=\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1,c=0$.

Cách 2: Vì $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$ nên $(b-1)(c-1)\geqslant 0$ hay $bc+1\geqslant b+c$.

Mặt khác, $b+c=2-a\geqslant 1$ suy ra $\frac{1}{b+c}\leqslant 1$ nên $\frac{1}{bc+1}\leqslant\frac{1}{b+c}\leqslant\frac{1+a}{b+c+a}$.

Chứng minh tương tự, ta được

$$Q\leqslant\frac{1+c}{a+b+c}+\frac{1+a}{a+b+c}+\frac{1+b}{a+b+c}=\frac{3+a+b+c}{a+b+c}=\frac{5}{2}.$$

Dẫn đến $P \geqslant 3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$. Dấu bằng xãy ra khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó.

Cách 3: Do $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ nên $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 0$. Điều này tương đương với

$$ab+bc+ca+1-abc-(a+b+c) \geqslant 0$$

hay

$$ab+bc+ca \geqslant 1+abc \geqslant 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ca}{1+ca} \\ &\geqslant \frac{ab}{1+ab+bc+ca}+\frac{bc}{1+ab+bc+ca}+\frac{ca}{1+ab+bc+ca} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{1+ab+bc+ca}=1-\frac{1}{1+ab+bc+ca} \\ &\geqslant 1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị của nó.

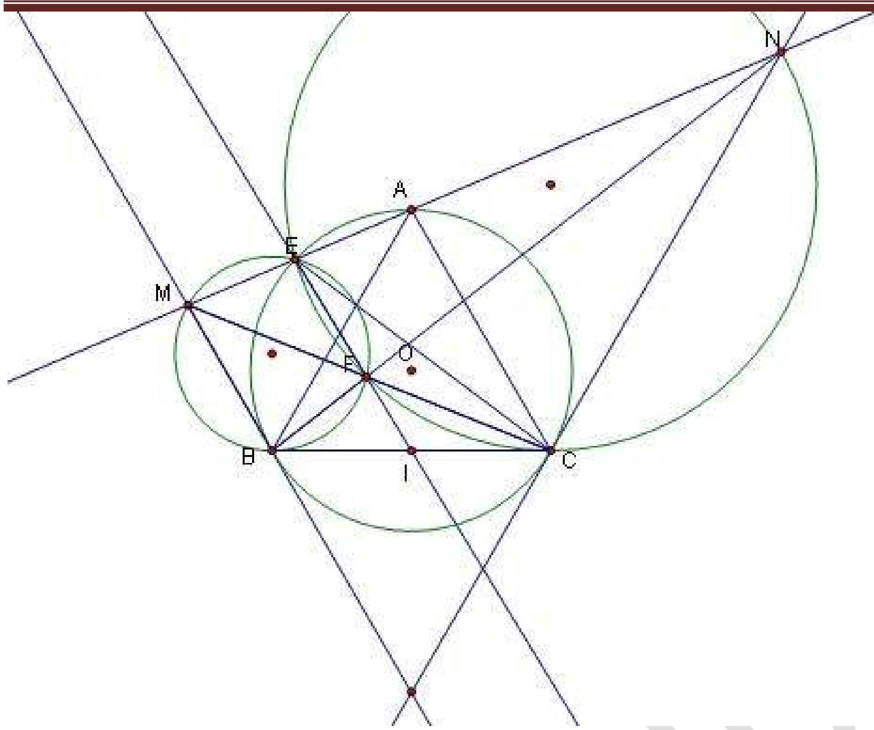
HÌNH HỌC

Câu 9. Cho tam giác ABC đều cố định nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại điểm thứ hai là E (E $\neq$ A). Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N. MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác CAN đồng dạng với tam giác BMA, tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.

b) Tứ giác BMEF là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi nhưng luôn đi qua A.



a) $\angle MBA = \angle ACN = 60; \angle M = 1/2$ (cung ACB - cung BE) $= 1/2$ (cung CAB - cung BE) $= 1/2$.
cung CAE $= \angle CAN$. $+\angle B = \angle C = 120$ -dùng $c - g - c$.

b) $\angle BFM = \angle BCF + \angle FBC = \angle BNC + \angle FBC = 60 = \angle BEM$.

c) Câu b suy ra $\angle IFB = 60 = \angle IBE$. Nên tam giác IFB đồng dạng IBF, suy ra IB.IB=IF.IC.
Tương tự IC.IC=IF.IE nên IB=IC vậy I cố định.