

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
 KIỂM TRA**

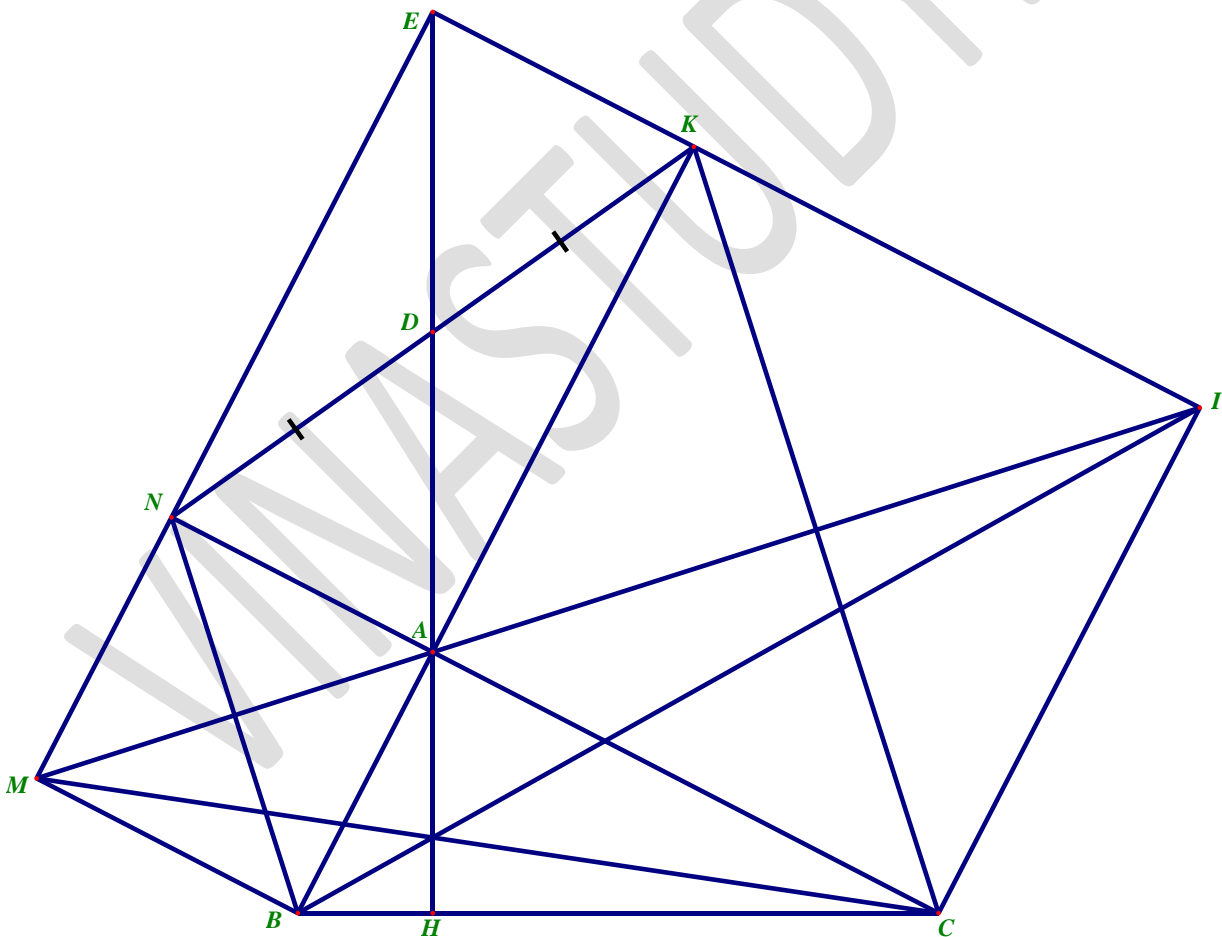
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A . Đường cao AH, dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABMN, ACIK. Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M, A, I thẳng hàng
- b) CKNB là hình thang cân
- c) AH đi qua trung điểm D của NK và các đường thẳng AH, IK, MN cắt nhau tại điểm E;
- d) Các đường thẳng AH, CM, BI đồng quy và $AN^2 = NK^2 - AK^2$.

HD:



a) Ba điểm M, A, I thẳng hàng;

Theo giả thiết: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAN} = \widehat{CAK} = 90^\circ$

Nên $\widehat{BAN}; \widehat{CAK}$ là hai góc đối đỉnh

Do AM, AI là đường chéo hình vuông $ABMN, ACIK$

Suy ra AM, AI là tia phân giác của $\widehat{BAN}; \widehat{CAK}$

Ta có: $\widehat{MAI} = \widehat{MAN} + \widehat{NAK} + \widehat{KAI} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, A, I thẳng hàng.

b) Tứ giác $CKNB$ là hình thang cân;

Xét hình vuông $ABMN$ có AM, BN là hai đường chéo nên $AM \perp BN$ (1)

Tương tự: $AI \perp CK$ (2)

Mà M, A, I thẳng hàng (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $BN \parallel CK \Rightarrow BCKN$ là hình thang (*)

Mặt khác: $BK = BA + AK = AN + AC = CN$ (cạnh hình vuông $ABMN, ACIK$) (**)

Từ (*); (**) suy ra tứ giác $BCKN$ là hình thang cân.

$\triangle ABC = \triangle ANK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANK} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ góc C)

và $\widehat{HAC} = \widehat{DAN}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{DNA} = \widehat{DAN}$

$\Rightarrow \triangle NDA$ cân tại D .

$\Rightarrow DN = DA$ (+)

Chúng minh tương tự: $DA = DK$ (++)

Từ (+) và (++) , ta có $DN = DK$

Vậy D là trung điểm của NK

+ Gọi E là giao điểm của MN và IK .

Xét tứ giác $ANEK$ có: $\widehat{A} = \widehat{N} = \widehat{K} = 90^\circ \Rightarrow ANEK$ là hình chữ nhật

Mặt khác D là trung điểm của NK nên D là trung điểm của AK .

Theo chứng minh trên: AH đi qua D

Do đó AH đi qua E . Hay 3 đường thẳng AH, MN, IK đồng quy tại E .

d) Các đường thẳng AH, CM, BI đồng quy và $AN^2 = NK^2 - AK^2$.

$$\triangle ABC = \triangle KEA \Rightarrow BC = AE$$

Lại có $\widehat{MBC} = 90^\circ + \widehat{B}; \widehat{EAB} = 90^\circ + \widehat{B}$ (góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABH)
 $\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{EAB}$.

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle BAE$ có:

$$BM = BA \text{ (cạnh hình vuông)}$$

$$\widehat{MBC} = \widehat{EAB} \text{ (cmt)}$$

$$BC = AE \text{ (cmt)}$$

Suy ra

$$\triangle MBC = \triangle BAE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{ABE}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABE} + \widehat{EBM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{EBM} = 90^\circ \Rightarrow MC \perp EB$$

Chứng minh tương tự: $BI \perp EC$

Xét $\triangle EBC$ có $EH; BI; CM$ là các đường cao nên cắt nhau tại một điểm.

Các đường thẳng AH, CM, BI đồng quy.

+ Xét $\triangle ANK$ vuông tại A , theo định lý Pytago ta có:

$$NK^2 = AN^2 + AK^2 \Rightarrow AN^2 = NK^2 - AK^2.$$

VINASTUDY